Relatività e geometria pseudo-euclidea

Prof. Enrico Righetto

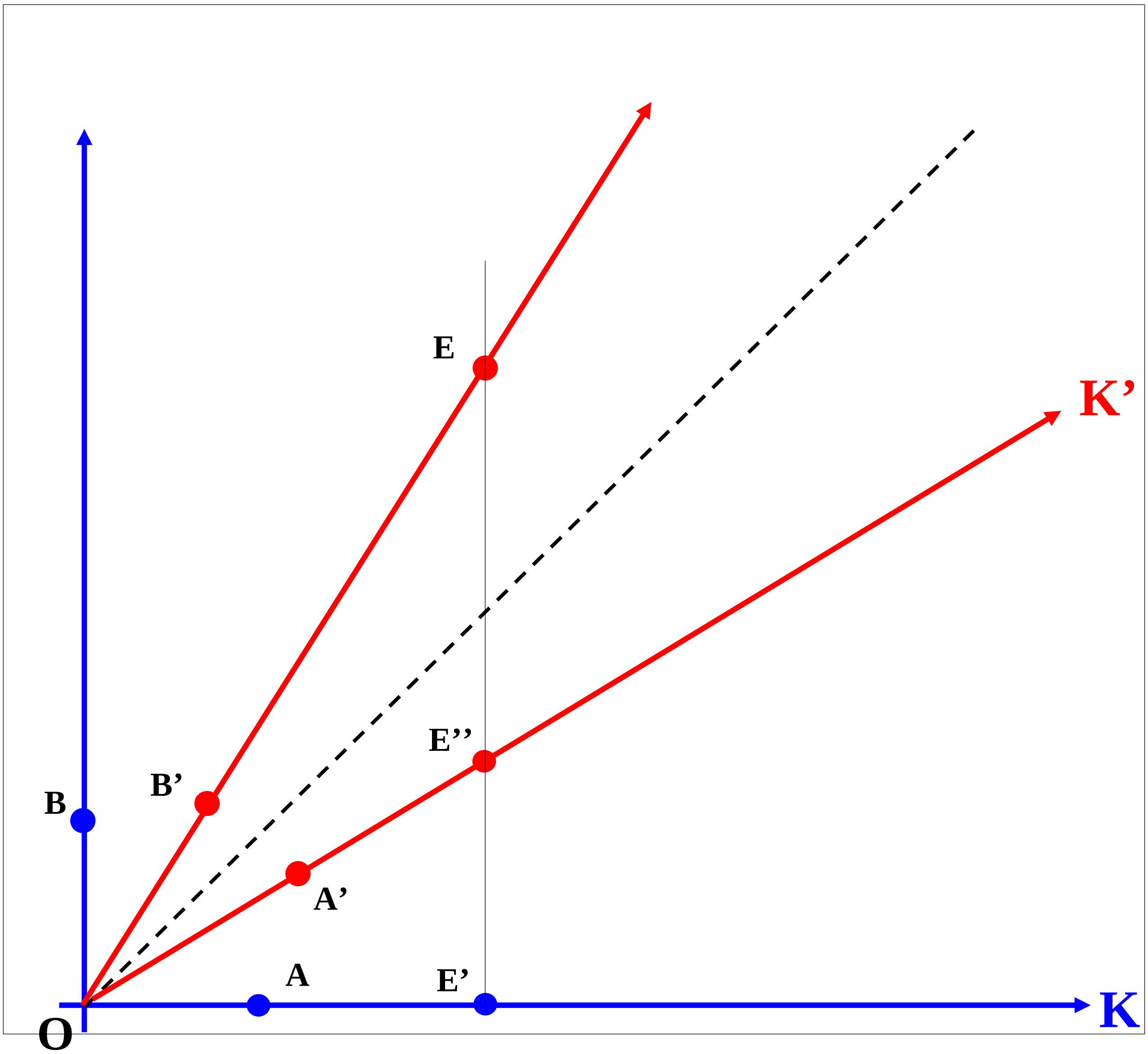
Esempio e commenti

Dati due sistemi di riferimento inerziali (cronotopi) K e $K^{'}$ che si spostano di moto uniforme con velocità V l'uno rispetto all'altro, le trasformazioni relativistiche hanno, come noto, equazioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} x' + \dfrac{\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} ct' \\[2ex] ct = \dfrac{\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} x' + \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} ct' \end{cases}$$

Queste equazioni forniscono le K coordinate di un punto, note le $K^{'}$ coordinate dello stesso punto; le trasformazioni inverse sono identiche, ma con la sostituzione di $-V$ a V.

Esempio:



	K	K'
O	$(0,0)$	$(0,0)$
A	$(1,0)$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \dfrac{-\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right)$
A'	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \dfrac{\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right)$	$(1,0)$
B	$(0,1)$	$\left(\dfrac{-\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right)$
B'	$\left(\dfrac{\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right)$	$(0,1)$
E	$\left(\alpha, \alpha\dfrac{c}{V}\right)$	$\left(0, \alpha\dfrac{c}{V}\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)$
E'	$(\alpha,0)$	$\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \dfrac{-\alpha\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right)$
E''	$\left(\alpha, \dfrac{V}{c}\alpha\right)$	$\left(\alpha\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}, 0\right)$

Commenti:

1. Dati gli eventi **O** e **E** (che "avvengono" nello stesso *posto* in **K'**), essi sono separati da un intervallo di *tempo* $\Delta t' = \alpha \frac{c}{V}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ in **K'** e da un intervallo di *tempo* $\Delta t = \alpha \frac{c}{V}$ in **K**; da ciò segue che $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ oppure che $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. Un orologio in movimento ritarda rispetto ad un orologio fisso

2. Sia dato un regolo a riposo in **K;** i suoi estremi siano gli eventi **O** e **E'** di modo che essi sono separati da un intervallo di *spazio* $\Delta x = \alpha$ in **K,** vale a dire che la lunghezza del regolo, in **K** è $\Delta x = \alpha$; per trovare la corrispondente lunghezza in **K'**, bisogna valutare come si trasformano le rispettive coordinate spaziali in riferimento ad uno stesso istante t'; considerando gli eventi **O** e **E''** si ha che $\Delta x' = \alpha\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$; da ciò segue che $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ oppure che $\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$. Un regolo ha la sua massima lunghezza "a riposo" e si accorcia visto da un qualsiasi riferimento in movimento rispetto ad esso.