

LEZ1

(2 ore, martedì 4 dicembre 2011)

Esempio di problema di fisica da trattare numericamente.

Decadimento di nuclei radioattivi

$N \equiv$ nuclei radioattivi presenti all'istante di tempo t

Si suppone non vengano introdotti nuclei nuovi nel campione durante il tempo.

Il numero di decadimenti dN nell'intervallo di tempo dt è proporzionale a N

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$\lambda \equiv$ costante di decadimento o disintegrazione

L'eq. è integrabile analiticamente.

Poste le condizioni iniziali $N(t=0) \equiv N_0$ si ottiene

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$[\lambda] = T^{-1}$$

si definisce $\tau \equiv \frac{1}{\lambda}$ vita media

Si può definire anche un tempo di dimezzamento $\equiv$ tempo necessario per far sì che metà dei nuclei del campione iniziale siano decaduti

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

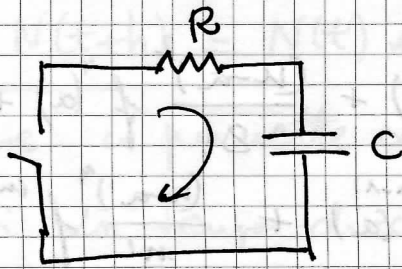
$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda t_{1/2}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Altri esempi di fisica simile: studio dell'andamento della carica all'interno delle pareti di un condensatore in un circuito RC



Condizioni iniziali:

- al tempo $t=0$, quando viene chiuso il circuito, è presente la carica Q_0 sulle armature del condensatore.

$$V_R = RI$$

$$Q = V_C C$$

dalle leggi di Kirchhoff:

$$V_R + V_C = 0$$

$$RI + \frac{Q}{C} = 0$$

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\frac{dQ}{Q} = - \frac{dt}{RC}$$

la soluzione è

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

$$RC \equiv \tau$$

Cerchiamo una soluzione numerica ad entrambi i problemi.

AIM: Calcolare $N(t)$ e $Q(t)$ conoscendo il valore al tempo iniziale N_0 e Q_0 .

Facciamo uso delle sviluppo in serie di Taylor.

Data una funzione continua $f(u)$ con derivate continue fino all'ordine (n) all'interno di un intervallo $a \leq u \leq b$ è possibile scrivere

$$f(u) = f(a) + (u-a)f'(a) + \frac{(u-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(u-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(u-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

$$\text{con } \xi = a + \theta(u-a) \quad 0 < \theta < 1$$

Nel caso in cui $a=0$, si ha la serie di MacLaurin

$$f(u) = f(0) + u f'(0) + \frac{u^2}{2!} f''(0) + \dots$$

Per terminare allo studio dell'evoluzione del numero di nuclei radioattivi $N(t)$ e sviluppare la funzione nell'intervallo $t+h$
 $h \equiv \Delta t$

$$N(t+h) = N(t) + h \frac{dN}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2N}{dt^2} + O(h^3)$$

Supponendo h piccolo, possiamo trascurare termini $O(h^2)$

$$N(t+h) \sim N(t) + h \frac{dN}{dt}$$

la formula può essere riscritta come

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

ed è la definizione di derivata per $h \rightarrow 0$

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h}$$

riprendendo l'eq. di partenza
potremo scrivere

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$N(t+h) = N(t) - h \lambda N(t)$$

L'equazione ci permette di evolvere nel tempo, ad intervalli di tempo discreti h , il numero di nuclei.

Algoritmo

- 1) Fixare le condizioni iniziali: numero di nuclei per $t=0$
- 2) Definire la lunghezza dell'intervallo temporale h
- 3) Calcolare l'evoluzione temporale di N ad intervalli discreti $j h$ con $j = 1, 2, \dots, \nu$

$$t_{j+1} = t_j + h$$

$$N_{j+1} = N_j - \lambda N_j \cdot h = N_j (1 - \lambda h)$$

avendo definito $N_j \equiv N(t=t_j)$

Esercizio:

Calcolare l'evoluzione temporale di $N_0 = 100$ atomi radioattivi. la costante di decadimento $\lambda = 1$.

Evolvere il sistema con

$$h = 0.5 \text{ s}$$

$$h = 0.2 \text{ s}$$

$$h = 0.05 \text{ s}$$

L'algoritmo ricavato prende il nome di metodo di Euler

In generale, nel caso di una equazione differenziale ordinaria del II ordine, si preferisce riscriverla come due equazioni del I ordine.

E. scriviamo

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Q(t) \frac{du}{dt} = R(t)$$

si riscrive come

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v(t) \\ \frac{dv}{dt} = R(t) - Q(t)v(t) \end{cases}$$

Con il metodo di Euler si calcolano gli sviluppi in serie di Taylor per $u(t)$ e $v(t)$ fermandosi al primo ordine (trascurando i termini $O(h^2)$).

Esempio. Moto di una particella in 1-dim

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

iscriviamo l'eq. come

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = a = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Sviluppiamo in serie di Taylor

$$\begin{cases} u(t+h) = u(t) + h \frac{du}{dt} + O(h^2) \\ v(t+h) = v(t) + h \frac{dv}{dt} + O(h^2) \end{cases}$$

le eq. si possono riscrivere come

$$\begin{cases} u(t+h) = u(t) + h v(t) \\ v(t+h) = v(t) + h \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

Algoritmo

- 1) Fissare le condizioni iniziali e la lunghezza dell'intervallo temporale h

$$\begin{cases} t_{j+1} = t_j + h \\ u_{j+1} = u_j + h v_j \\ v_{j+1} = v_j + h \frac{F}{m} \end{cases}$$

Domande:

- 1) Andri errori introdurre nella discretizzazione dello spatio-tempo e come riuscire a capire se sono trascurabili oppure no.
- 2) Come ottimizzare la discretizzazione del tempo (salto di $h \equiv \Delta t$).

DEF

Un algoritmo si dice di ordine n se l'errore globale commesso $\bar{\epsilon}$ di ordine $O(\Delta t^n) \equiv O(h^n)$

Calcolo dell'errore con il metodo di Eulero.

Supponiamo di evolvere il sistema tra gli istanti di tempo t_a e t_b

Fissato h , il numero di step necessari è

$$N = \frac{t_b - t_a}{h}$$

L'errore commesso per ogni singolo iterazione è $O(h^2)$ ed $\bar{\epsilon}$ costante.

L'errore globale sarà

$$N \times O(h^2) \propto \frac{1}{h} \cdot h^2 \propto h$$

Il metodo di Eulero è quindi una approssimazione al primo ordine.

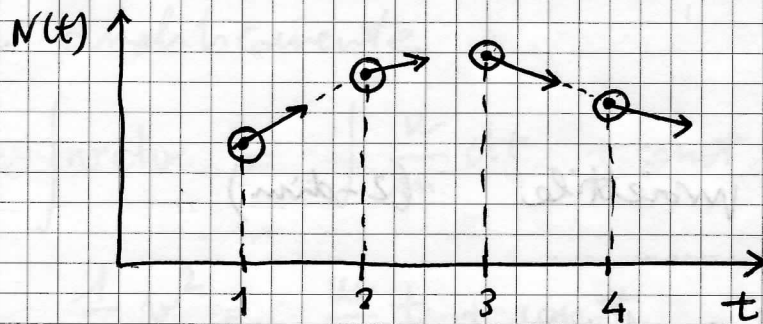
La scelta di h è molto importante:

- h grandi $\Rightarrow$ errori grandi
- h piccoli $\Rightarrow$ migliore precisione, ma maggiore costo computazionale.

Ultimone considerazione:

= l'algoritmo di Euler è asimmetrico:

la soluzione viene espansa in un intervallo usando soltanto l'informazione sulla derivata all'inizio dell'intervallo:



Esercizio:

Studiare il decadimento di due tipi di nuclei



$$\begin{cases} \frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A \\ \frac{dN_B}{dt} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A \end{cases}$$