

LEZ 2

Studio di alcuni problemi di meccanica e risoluzione con metodi numerici.

PROBLEMA 1

Moto realistico di una bicicletta (1-dim)

PROBLEMA 2

Moto di un proiettile (2-dim)

Moto di una bicicletta

Approssimazione $\emptyset$: completa mancanza di forze di attrito dell'aria.

Considerando la bicicletta un punto materiale, l'eq. del moto in una dimensione è

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

L'espressione di F può essere alquanto complicata. Si preferisce usare un approccio alternativo:

un ciclista ben allenato riesce a sviluppare una potenza costante per un lungo periodo di tempo (~ 1 ora)

Quantificando $W = 400 \text{ W}$ per 1 ora

Ma

$$W = \frac{dE}{dt}$$

Supponendo il moto si sviluppi in piana, in assenza di forze di attrito tutta la potenza si sviluppa in energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$$W = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 m v \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{W}{m v} \quad (1)}$$

Dato che $W = 400 \text{ W}$ è costante nel tempo, l'eq. è risolvibile analiticamente

$$\int v dv = \int \frac{W}{m} dt + \text{const}$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{W}{m} t + \text{const}$$

Imponiamo le condizioni al contorno:

- per $t=0$ la velocità iniziale è v_0

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \text{const}$$

Riscrivendo l'espressione

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{W}{m} t$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{W}{m} t}}$$

L'eq. di partenza (1) può essere risolta numericamente con Euler:

$$\begin{cases} v_{j+1} = v_j + h \frac{W}{m v_j} \\ t_{j+1} = t_j + h \end{cases}$$

Calcoliamo con

$$h = 0.1 \text{ s}$$

$$v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m = 70 \text{ kg}$$

$$W = 400 \text{ W}$$

Evolviamo da 0 a 200 s .

Il modello non è chiaramente realistico: il moto delle biciclette prosegue e la velocità raggiunge valori $v = 45 \text{ m/s}$ in pochi minuti.

È necessario introdurre il contributo di forze dissipative che limitano la velocità e consentano la perdita di energia.

Supponiamo la principale origine di attrito sia dovuta alla resistenza dell'aria.

In via del tutto generale, scriviamo la forza come

$$F_{\text{attr}} = -B_1 v - B_2 v^2$$

- Il primo termine $(-B_1 v)$ domina alle basse velocità. Nel caso di forme molto semplici si può calcolare il coefficiente B_1
[per esempio moto di una sfera in un fluido viscoso in regime laminare. legge di Stokes $F = -6\pi\eta Rv$]
- Il secondo termine $(-B_2 v^2)$ domina alle velocità più grandi e B_2 non è calcolabile analiticamente neanche per oggetti molto semplici, figuriamoci per l'insieme biciclette + ciclista.

Nel nostro caso, $v_0 = 4 \text{ m/s}$, il secondo termine è dominante.

Cerchiamo di ricavare una modellizzazione di B_2 ~~da~~ partendo da considerazioni di tipo energetico.

Quindi, la bicicletta + ciclista porta una massa di aria che nel tempo dt è

$$dm_{\text{aria}} = \rho_{\text{aria}} dV = \rho_{\text{aria}} A v dt$$

$v dt \equiv$ spaz. infinitesimale percorsa nel tempo dt

$A \equiv$ superficie frontale bicicletta + ciclista.

All'aria viene fornita una velocità v e quindi la sua energia cinetica è

$$dE_{\text{kin}} = \frac{1}{2} dm_{\text{aria}} v^2$$

L'energia cinetica acquistata (l'aria era ferma) è uguale al lavoro fatto dalle forze d'attrito

$$F_{\text{attr}} \frac{v dt}{ds} = \frac{1}{2} \rho_{\text{aria}} A v^2 \frac{v dt}{ds}$$

Dal confronto delle due espressioni si ottiene

$$F_{\text{attr}} \propto \frac{1}{2} \rho_{\text{aria}} A v^2$$

Con buona appross. possiamo considerare $F_{\text{attr}} = -\frac{1}{2} C_p A v^2$

L'eq. di potenza diventa

$C \equiv$ coeff. di attrito.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv} - \frac{1}{2} \frac{C_p A v^2}{m}$$

Applicando il Metodo di Eulero con

$$W = 400 \text{ W}$$

$$m = 70 \text{ kg}$$

$$v_0 = 4 \text{ m/s}$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$A = 0.33 \text{ m}^2$$

$$\rho_{\text{aria}} = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1.2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$v_{j+1} = v_j + \frac{W}{m v_j} h - \frac{C_p A v_j^2}{2 m} h$$

Alcune considerazioni

(1) Abbiamo trascurato completamente il termine di attrito viscoso.

È una approssimazione corretta?

Consideriamo il rapporto tra le due forze.

Nel caso di attrito viscoso, abbiamo due strati separati da una superficie di



contatto dS con che si muovono a velocità differenti

Il modulo delle forze di attrito è

$$dF = \eta dS \frac{\partial v}{\partial z}$$

$dS \equiv$ superficie di contatto

$\eta \equiv$ viscosità del fluido

$$\eta_{\text{aria}} \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Quindi, come ordine di grandezza

$$|F^{\text{stokes}}| \propto \eta A \frac{\Delta v}{\Delta z} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot 0.33 \text{ m}^2 \frac{4 \text{ m/s}}{1 \text{ m}}$$

$$|F^{\text{stokes}}| \sim 25 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

$$|F_{\text{drag}}| = \frac{1}{2} \rho C A v^2 = \frac{1}{4} \times 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 0.3 \text{ m}^2 \cdot 16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\approx 50 \text{ N}$$

Quindi

$$\frac{|F_{\text{stokes}}|}{|F_{\text{drag}}|} \approx 10^{-5}$$

L'aver trascurato il termine di attrito viscoso è pertanto un'approssimazione corretta.

- (2) Abbiamo impostato una velocità iniziale > 0
 $(v_0 = 4 \text{ m/s})$

L'impressione è dettata dal fatto che l'eq. di partenza diverge per $v=0$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{mv}$$

$$v_{j+1} = v_j + \frac{k}{mv_j} h$$

divergenza

È un problema numerico.

È possibile modificare la modellizzazione del nostro sistema imponendo che per $t=0$ il ciclista eserciti una forza costante

$$F_0 = \frac{k}{v^*}$$

$$\text{con } v^* = 7 \text{ m/s}$$

Quindi per

$$F_0 v < k$$

$$v_{j+1} = v_j + \frac{F_0}{m} h$$

$$\text{con } F_0 = \frac{400 \text{ N}}{7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

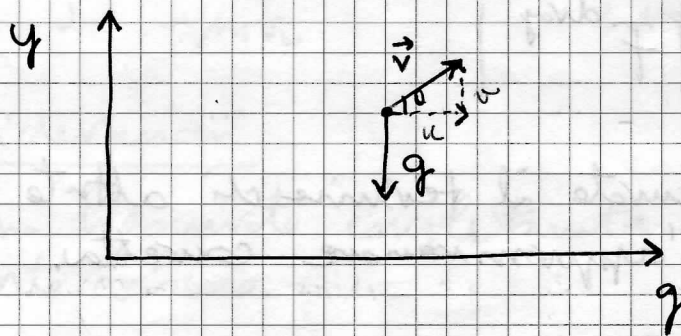
Moto reale di un proiettile

Studio della traiettoria di una palla di cannone di lunghe dimensioni.

diámetro = 10 cm

$v_0 = 700 \text{ m/s}$

Approssimazione $\emptyset$ trascuriamo la resistenza dell'aria



Scrivere l'eq. del moto nelle due dimensioni:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = -g \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

La uscirò con due eq. differenziali del 1° ordine

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -g \\ \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{du}{dt} = 0 \end{cases}$$

Applicando il metodo di Eulero

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + v_j h \\ v_{j+1} = v_j - g h \\ x_{j+1} = x_j + u_j h \\ u_{j+1} = u_j \end{cases}$$

Approssimazione 1

introdurre l'effetto delle forze di attrito.

$$F_{\text{attr}} = -B_2 |\vec{v}|^2 = -B_2 (u^2 + v^2)$$

$$u = |\vec{v}| \cos \theta$$

$$v = |\vec{v}| \sin \theta$$

$$F_{\text{attr}}^u = -B_2 |\vec{v}|^2 \cos \theta = -B_2 |\vec{v}| u$$

$$F_{\text{attr}}^v = -B_2 |\vec{v}|^2 \sin \theta = -B_2 |\vec{v}| v$$

Aggiungo all'eq. le forze di attrito e uso il metodo di Eulero

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + v_j h \\ w_{j+1} = w_j + u_j h \\ v_{j+1} = v_j - g h - \frac{B_2 |\vec{v}|}{m} v_j h \\ u_{j+1} = u_j - \frac{B_2 |\vec{v}|}{m} u_j h \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{con} \\ |\vec{v}| = \sqrt{v_j^2 + u_j^2} \end{matrix}$$

Nei calcoli usiamo

$$\frac{B_2}{m} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$$

Approssimazione 2

Variazione della densità
dell'aria con la quota

È possibile utilizzare due modelli:

[1] l'atmosfera è un gas ideale a temperatura costante

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma}{\gamma_0}}$$

$$\gamma_0 = \frac{h_B T}{mg} \sim 1 \cdot 10^4 \text{ m}$$

$$p_0 \approx 1.2 \text{ g/l}$$

Ma questo modello dell'atmosfera come gas ideale non è realistico: sappiamo che la temperatura dell'aria può variare considerevolmente con la quota.

[2] Approssimazione adiabatica.

Si assume l'aria un ottimo conduttore di calore
[Riferenza E. Fermi, "Termodinamica"]

L'approssimazione funziona bene almeno per la
troposfera (fino a 10 km)

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\alpha \gamma}{T_0}\right)^\alpha$$

$$\alpha \approx 6.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

$$T_0 \approx 300 \text{ K}$$

temperatura
al livello del
mare

$$\alpha = 2.5$$

Nel nostro caso

$$F_{\text{attr}}^* = \frac{p}{p_0} F_{\text{attr}} (\gamma=0)$$

Nell'eq. di Eulero

$$B_2 \rightarrow B_2 \cdot \frac{p}{p_0}$$