RATIO OF UNIFORMS

Sia data una funzione densità di probabilità $h(x)$, definita nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ e si voglia campionare dalla distribuzione di probabilità

$$f(x) = \frac{h(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x')\,dx'}$$

Il metodo, proposto nel 1977 da Kinderman e Monahan, considera la regione di piano Ω definita dalle variabili u_1 e u_2 che soddisfano la relazione

$$\Omega : \quad 0 \leq u_1^2 \leq h\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$$

Kindermann e Mohan dimostrarono che se u_1 e u_2 sono distribuite uniformemente nel dominio Ω

$x = \frac{u_2}{u_1}$ si distribuisce come $f(x)$

La densità di probabilità congiunta per le variabili u_1 e u_2 è

$$f(u_1, u_2) = \begin{cases} k & \text{se} \quad 0 \leq u_1 \leq \sqrt{h\left(\frac{u_2}{u_1}\right)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Introduciamo una trasformazione di variabili da $(u_1, u_2) \longrightarrow (x, y)$ con le relazioni

$$\begin{cases} x = \frac{u_2}{u_1} \\ y = u_1 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = xy \end{cases}$$

con la condizione $0 \le y \le \sqrt{h(x)}$

riscriviamo la densità di probabilità nelle nuove variabili

$$f(x,y) = |J|\, f(u_1,u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = |-y|$$

Quindi $\quad f(x,y) = y\,k$

Calcoliamo la densità di probabilità marginale, integrando in y

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{h(x)}} dy\, f(x,y) = \int_0^{\sqrt{h(x)}} dy\, ky = k \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{h(x)}} = \frac{k}{2} h(x)$$

$$f(x) = \frac{h(x)}{\int h(x)dx} \qquad \text{con} \int h(x)dx = \frac{2}{k}$$

Nella pratica si campionano le variabili u_1 e u_2 uniformemente all'interno di un rettangolo che racchiuda l'area $0 \le u_1 \le \sqrt{h\left(\frac{u_2}{u_1}\right)}$

Il rettangolo è così definito

$$0 \leq u_1 \leq b \qquad c \leq u_2 \leq d$$

con
$$b = \max_{\Omega} \left[\sqrt{h(x)}\right]$$

$$c = \min_{\Omega} \left[x\sqrt{h(x)}\right] = -\sup_{\Omega} \left(x\sqrt{h(x)}\right)$$

$$d = \max_{\Omega} \left[x\sqrt{h(x)}\right] = +\sup_{\Omega} \left(x\sqrt{h(x)}\right)$$

$\boxed{\text{ALGORITMO}}$

1) generare u_1 e u_2 $\qquad u_1 \in \mathcal{U}(0, b)$

$u_2 \in \mathcal{U}(c, d)$

2) calcolare $x = \dfrac{u_2}{u_1}$

→ x ~~[illegible]~~ $u_1^2 \leq h\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)$ → accettare x

→ altrimenti ripetere da (1)

L'efficienza della generazione è

$$\epsilon = \frac{\int h(x)\,dx}{2b(d-c)}$$

Esempio. Campionamento da una distribuzione normale

$$h(x) = e^{-x^2/2}$$

Definiamo il dominio

$$b = \sup \sqrt{h(x)} = \sup \left(e^{-x^2/2} \right)^{1/2} = 1$$

$$d = \sup \left[x \sqrt{h(x)} \right] = \sup \left(x \left(e^{-x^2/2} \right)^{1/2} \right)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$c = -\sqrt{\frac{2}{e}}$$

ALGORITMO

1) generare $u_1 \in \mathcal{U}(0,1)$

$u_2 \in \mathcal{U}\left(-\sqrt{\frac{2}{e}}, \sqrt{\frac{2}{e}}\right)$

2) porre $x = \frac{u_2}{u_1}$

se $u_1^2 \leq e^{-\frac{1}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2}}$

$$\downarrow$$

$$\ln u_1^2 \leq -\frac{1}{2} \frac{u_2^2}{u_1^2}$$

$$-4 u_1^2 \ln u_1^2 \geq u_2 \longrightarrow \text{accetto } x$$