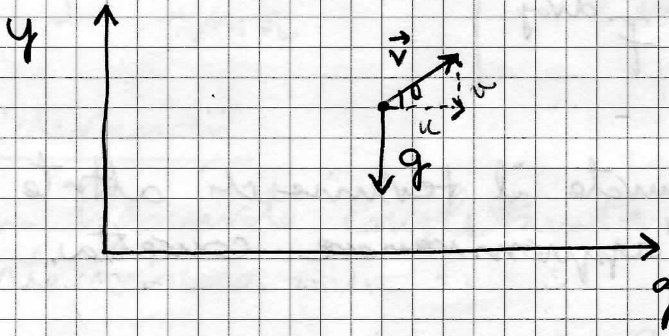
Moto reale di un proiettile

Studio della traiettoria di una palla di cannone di larghe dimensioni.

diametro = 10 cm $\qquad v_0 = 700\ m/s$

$\boxed{\text{Approssimazione } \emptyset}$ trascuriamo la resistenza dell'aria



Scrivo l'eq. del moto nelle due dimensioni:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

La riscrivo come due eq. differenziali del I ordine

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = -g \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = u \\[2ex] \dfrac{du}{dt} = 0 \end{cases}$$

Applicando il metodo di Eulero

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + v_j\, h \\ v_{j+1} = v_j - g\, h \\ x_{j+1} = x_j + u_j\, h \\ u_{j+1} = u_j \end{cases}$$

$\boxed{\text{Approssimazione 1}}$ introduciamo l'effetto delle forze di attrito.

$$F_{attr} = -B_2 \, |\vec{v}|^2 = -B_2 \, (u^2+v^2)$$

$u = |\vec{v}| \cos\theta$

$v = |\vec{v}| \cos\theta$

$$F^{u}_{attr} = -B_2 \, |\vec{v}|^2 \cos\theta = -B_2 \, |\vec{v}| \, u$$

$$F^{y}_{attr} = -B_2 \, |\vec{v}|^2 \sin\theta = -B_2 \, |\vec{v}| \, v$$

Aggiungo all'eq. le forze di attrito e uso il metodo di Eulero

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + v_j \, h \\ x_{j+1} = x_j + u_j \, h \\ v_{j+1} = v_j - g h - \dfrac{B_2 |\vec{v}| v_j}{m} h \\ u_{j+1} = u_j - \dfrac{B_2}{m} |\vec{v}| u_j \, h \end{cases}$$

con $|\vec{v}| = \sqrt{v_j^2 + u_j^2}$

Nei calcoli useremo $\dfrac{B_2}{m} = 4 \cdot 10^{-5} \, m^{-1}$

Approssimazione 2 — Variazione della densità dell'aria con la quota

È possibile utilizzare due modelli:

[1] l'atmosfera è un gas ideale a temperatura costante

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\frac{y}{y_0}} \qquad y_0 = \frac{k_B T}{mg} \sim 1.10^4 \, m$$

$$\rho_0 \equiv 1.2 \; g/l$$

Ma questo modello dell'atmosfera come gas isotermo non è realistico: sappiamo che la temperatura dell'aria può variare considerevolmente con la quota.

[2] Approssimazione adiabatica.
Si assume l'aria un cattivo conduttore di calore
[Referenza E. Fermi, "Termodinamica"]
l'approssimazione funziona bene almeno per la troposfera (fino a 10 km)

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{a y}{T_0}\right)^{\alpha}$$

$a \equiv 6.5 \, 10^{-3} \frac{K}{m}$ $\qquad T_0 \equiv 300 K$ temperatura al livello del mare

$\alpha = 2.5$

Nel nostro calcolo

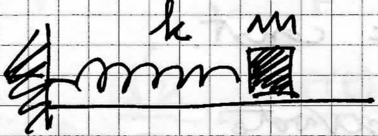
$$F^*_{attr} = \frac{\rho}{\rho_0} F_{attr} (y=0)$$

Nell'eq. di Eulero $\qquad B_2 \to B_2 \cdot \frac{\rho}{\rho_0}$

$\boxed{\text{LEZ 2}}$ (1 ora, giovedì 6 ottobre 2011)

Studio di moti oscillatori

Es. oscillatore armonico in 1-dim



forza di richiamo elastica $F = -kx$

eq. del moto $\dfrac{d^2x}{dt} = \dfrac{F}{m} = -\dfrac{k}{m}x$ poniamo, per semplicità $k = m = 2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

Soluzione analitica.

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$x = e^{i\alpha t}$$
$$\dot{x} = \alpha i e^{i\alpha t}$$
$$\ddot{x} = -\alpha^2 e^{i\alpha t}$$

$$-\alpha^2 e^{i\alpha t} + e^{i\alpha t} = 0 \qquad e^{i\alpha t}(1-\alpha^2) = 0$$

$$\alpha = \pm 1$$

soluzione generica $x(t) = A_1 e^{it} + A_2 e^{-it}$

Impongo le condizioni iniziali:

$x(t=0) = 1 \qquad 1 = A_1 + A_2$

$\dot{x}(t=0) = 0 \qquad iA_1 - iA_2 = 0 \;\to\; A_1 = A_2$

$$\boxed{A_1 = A_2 = \frac{1}{2}}$$

soluzione $x(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos(t) \qquad \dot{x}(t) = -\sin(t)$

Calcoliamo l'energia totale del sistema

$$E(t) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = x^2(t) + v^2(t)$$

$$E(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 = \text{const.}$$

L'energia è una quantità conservata.

Il moto rappresenta oscillazioni con periodo $T = 2\pi$

Risolviamo il problema con il metodo di Euler che abbiamo introdotto la lezione precedente

eq. di partenza $\qquad \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{j+1} = x_j + h v_j \\ v_{j+1} = v_j - h x_j \end{cases}$$

Calcoliamo l'energia

$$E_{j+1} = f(x_{j+1}, v_{j+1}) = x_{j+1}^2 + v_{j+1}^2$$

$$= (x_j + h v_j)^2 + (v_j - h x_j)^2$$

$$= x_j^2 + h^2 v_j^2 + \cancel{2 h x_j v_j} + v_j^2 + h^2 x_j^2 - \cancel{2 h x_j v_j}$$

$$= x_j^2 (1 + h^2) + v_j^2 (1 + h^2) = (v_j^2 + x_j^2)(1 + h^2)$$

$$E_{j+1} = E_j (1 + h^2)$$

L'energia del sistema aumenta di un termine $1 + h^2$.

la soluzione non è stabile!

Un'alternativa è usare il Metodo di Euler-Cromer.

Riprendiamo eq. del moto (1-dim, caso generale)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

metodo di Euler

$$\begin{cases} v_{j+1} = v_j + \frac{F}{m} h \\ x_{j+1} = x_j + v_j h \end{cases}$$

con Euler-Cromer:

1) calcoliamo evoluzione della velocità

2) calcoliamo nuova coordinata usando la velocità a t+

Euler Cromer
$$\begin{cases} v_{j+1} = v_j + \frac{F}{m} h \\ x_{j+1} = x_j + \boxed{v_{j+1}} h \end{cases}$$

Nel caso dell'oscillatore armonico 1-dim $\left(\frac{d^2x}{dt^2} = -x\right)$

abbiamo

$$\begin{cases} v_{j+1} = v_j - h x_j \\ x_{j+1} = x_j + h v_{j+1} = x_j + h(v_j - h x_j) = x_j(1-h^2) \end{cases}$$

Verifichiamo la conservazione dell'energia

$$E_{j+1} = x_{j+1}^2 + v_{j+1}^2$$

$$= \left[x_j(1-h^2) + h v_j\right]^2 + \left[v_j - h x_j\right]^2$$

$$= x_j^2(1+h)^2(1-h)^2 + h^2 v_j^2 + 2h(1-h^2)x_j v_j +$$

$$+ h^2 x_j^2 + v_j^2 - 2h x_j v_j$$

$$= x_j^2 \left\{ h^2 + (1-h^2)^2 \right\} + v_j^2 \left\{ h^2+1 \right\}$$

$$+ 2h\, x_j v_j \left\{ \cancel{1} - h^2 - \cancel{1} \right\}$$

$$= x_j^2 \left\{ h^2 + 1 + h^4 - 2h^2 \right\} + v_j^2 (1+h^2) - 2h^3 x_j v_j$$

$$= x_j^2 \left(h^4 - h^2 + 1 \right) + v_j^2 (1+h^2) - 2h^3 x_j v_j$$

⋮

in qualche modo ~~viene~~ i vari termini si compensano ed il metodo è stabile.

In generale, i metodi numerici per evolvere le equazioni del moto rientrano in due categorie:

I) OPEN or PREDICTOR methods:

predicono u_{j+1} esclusivamente in funzione di osservabili già conosciute o calcolate in step precedenti

II) CLOSED or PREDICTOR/CORRECTOR methods:

dapprima predicono un valore u'_{j+1} con una formula di predizione e successivamente usano una funzione $f(u'_{j+1})$ per correggere il valore u'_{j+1} ed ottenere u_{j+1}

La procedura predizione/correzione può essere iterata fino a quando la correzione diventa piccola a piacere.

Vediamo ora altri metodi

Metodo di Verlet

Utilizza lo sviluppo in serie di Taylor ad ordini sup

Espandiamo le coordinate attorno a t

$$(1a) \quad x(t+h) = x(t) + v(t)h + \frac{F}{m}\frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3x}{dt^3} + O($$

Similmente calcoliamo uno sviluppo all'indietro

$$(1b) \quad x(t-h) = x(t) - v(t)h + \frac{F}{m}\frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!}\frac{d^3x}{dt^3} + O($$

Sommando le due espansioni:

$$x(t+h) + x(t-h) = 2x(t) + \frac{F}{m}h^2 + O(h^4)$$

che può essere riscritta come

$$x(t+h) \simeq 2x(t) - x(t-h) + \frac{F}{m}h^2$$

Il metodo di Verlet è:

- veloce, richiede poca memoria
- non calcola direttamente le velocità e non le usa per calcolare la nuova posizione
- per quanto riguarda la conservazione di energia mostra piccoli drift su tempi lunghi

Sottraendo le eq. (1a) e (1b) di pagina precedente

$$x(t+h) - x(t-h) = 2h\,v(t) + O(h^3)$$

$$v(t) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} + O(h^2)$$

La velocità è accurata soltanto all'ordine h^2

Può essere importante calcolare l'energia cinetica del sistema, per esempio in calcoli di dinamica molecolare.

Esistono parecchi algoritmi equivalenti allo schema di Verlet.

Una classe di algoritmi semplici è chiamata
Leap-Frog : [dal vocabolario: LeapFrog: giocare alla cavallina]
→ calcolano la velocità ad intervalli temporali semi-interi ed usano le velocità per calcolare la nuova posizione.

$$v\left(t - \frac{h}{2}\right) = \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$

$$v\left(t + \frac{h}{2}\right) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$x(t+h) = x(t) + h\,v\left(t + \frac{h}{2}\right)$$

e $$v\left(t + \frac{h}{2}\right) = v\left(t - \frac{h}{2}\right) + h\frac{F}{m}$$

Altro schema equivalente a quello di Verlet
È simile all'espansione di Taylor per le coordinate

$$x(t+h) = x(t) + v(t)\,h + \frac{F}{m}\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

poi calcolate le nuove forze $F(t+h)$
calcolo le velocità come

$$v(t+h) = v(t) + \frac{F(t+h)+F(t)}{2m}\,h$$

Questo schema è equivalente all'algoritmo originale di Verlet.

Vediamo infine uno schema di Eulero modificato chiamato di Eulero - Richardson.

eq. di partenza $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{F(t)}{m} = a(t)$

$$a_j = \frac{F(x_j, v_j, t_j)}{m} \qquad\qquad a^* \equiv a_{j+\frac{1}{2}}$$

osservabili calcolate in $t+\frac{h}{2}$

$$\begin{cases} v^* = v_j + \dfrac{a_j}{2}h \\ x^* = x_j + \dfrac{v_j}{2}h \\ a^* = \dfrac{F(x^*, v^*, t+\frac{h}{2})}{m} \end{cases} \qquad \begin{aligned} v^* &\equiv v_{j+\frac{1}{2}} \\ x^* &= x_{j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

quindi:

$$v_{j+1} = v_j + a^* h = v_j + a_{j+\frac{1}{2}} h$$

$$x_{j+1} = x_j + v^* h = x_j + v_{j+\frac{1}{2}} h$$

Evolviamo x_j di uno step temporale $t+h$

$$x_1 \equiv x_{j+1} = x_j + v_j h + \frac{F}{m} \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Evolviamo ora le coordinate in due step temporali $t+\frac{h}{2}$

$$\cancel{x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{1}{2} v_j h + \frac{1}{2} \frac{F}{m} \frac{h^2}{2}}$$

$$(1)\quad x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + v_j \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{F_j}{m} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

secondo step

$$x_2 \equiv x_{j+1} = x_{j+\frac{1}{2}} + v_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{F_{j+\frac{1}{2}}}{m} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

sostituendo (1) ottengo

$$x_2 \equiv x_{j+1} = x_j + v_j \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} a_j \left(\frac{h}{2}\right)^2$$
$$+ v_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$= x_j + \frac{1}{2}\left(v_j + v_{j+\frac{1}{2}}\right) h + \frac{1}{2}\left(a_j + a_{j+\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$a_{j+\frac{1}{2}} = a_j + \frac{da_j}{dt} \frac{h}{2}$$

ma poiché abbiamo trascurato termini $O(h^3)$

possiamo scrivere $\quad a_{j+\frac{1}{2}} \simeq a_j$

quindi:

$$x_2 \equiv x_{j+1} = x_j + \frac{1}{2}\left(v_j + v_{j+\frac{1}{2}}\right)h + a_j\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Il termine $2x_2 - x_1$ è accurato a h^3

$$2x_2 - x_1 = 2x_j + \left(v_j + v_{j+\frac{1}{2}}\right)h + 2a_j\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2O(h^3)$$

$$- x_j - v_j h - a_j \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$= x_j + v_{j+\frac{1}{2}} h + O(h^3)$$

È possibile dimostrare che una simile precisione si ottiene anche per v_{j+1}

Il metodo di Euler-Richardson è equivalente ad un algoritmo di Runge-Kutta del II ordine.