

LEZ 3

Metodi di Runge-Kutta per l'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie

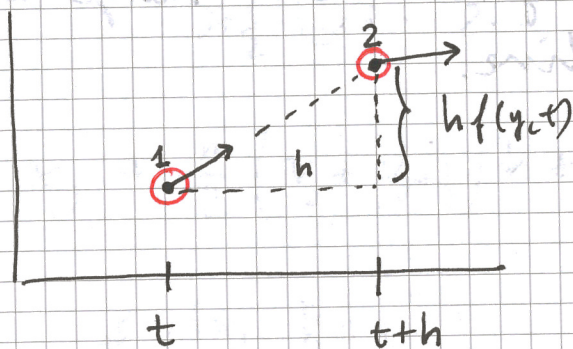
I metodi di Runge-Kutta permettono di risolvere equazioni differenziali ordinarie del tipo

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t), t)$$

Il metodo di Eulero, introdotto in precedenza, è un metodo di Runge-Kutta del I ordine

$$y(t+h) = y(t) + h \frac{dy}{dt} = y(t) + h f(y, t)$$

La formula è asimmetrica: evolve la soluzione attraverso un intervallo h ma utilizza le informazioni sulla derivata soltanto all'inizio dell'intervallo



Esiste un altro metodo, considerato nella lezione precedente, che consiste nel prendere un punto di mezzo tra $t + \frac{h}{2}$ e di calcolare y in quel punto. Usando i due valori del mid point si può evolvere la soluzione partendo dal punto iniziale

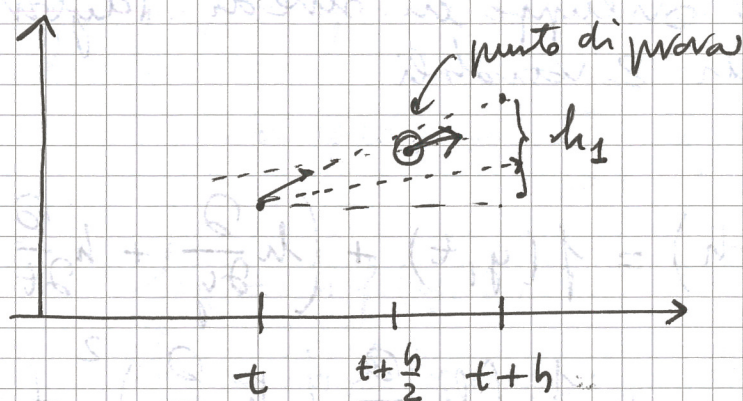
si definisce

$$h_1 = h \cdot f(y, t)$$

$$h_2 = h \cdot f\left(y + \frac{h_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right)$$

e si evolve

$$y(t+h) = y(t) + h_2 \quad (1)$$



Il metodo è accurato come $O(h^3)$

Per dimostrarlo si sviluppa in serie la funzione di partenza e si dimostra che i termini sono negletti fino all'ordine $O(h^3)$

Prendiamo lo sviluppo in serie di $y(t+h)$

$$y(t+h) = y(t) + h \frac{dy}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y}{dt^2} + O(h^3)$$

ma $\frac{dy}{dt} = f(y(t), t)$

quindi

$$y(t+h) = y(t) + h f(y, t) + \frac{h^2}{2} \frac{d}{dt} \left(f(y(t), t) \right)$$

$$= y(t) + h f(y, t) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{df}{dt} \right] + O(h^3)$$

$$= y(t) + h f(y, t) + \frac{h^2}{2} \left[f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{df}{dt} \right] + O(h^3)$$

Riprendiamo il nostro metodo (dalla (1) di pag. precedente

$$y(t+h) = y(t) + h_2 = y(t) + h f\left(y + \frac{h_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right)$$

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione di 2 variabili

$$f(y+h, t+h) = f(y, t) + \left(h \frac{\partial}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial t}\right) f + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 f + O(h^3)$$

nel nostro caso

$$f\left(y + \frac{h_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right) = f(y, t) + \frac{h_1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}$$

quindi (ricordando che $h_1 = h f(y, t)$)

$$y(t+h) = y(t) + h f(y, t) + \frac{h^2}{2} \left[f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{df}{dt} \right]$$

confrontando con lo sviluppo in serie di Taylor abbiamo ottenuto esattamente tutti i termini fino a $O(h^3)$ escluso.

In generale, si definisce un metodo di Runge Kutta di ordine m quella che esprime la soluzione dell'eq. differenziale $\frac{dy}{dt} = f(y(t), t)$

come segue

$$y(t+h) = y(t) + \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_m h_m$$

$$= y(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j$$

con

$$h_1 = h f(y, t)$$

$$h_2 = h f(y + u_{21} h_1, t + u_{21} h)$$

$$h_3 = h f(y + u_{31} h_1 + u_{32} h_2, t + u_{31} h + u_{32} h)$$

$\vdots$

$$h_m = h f\left(y + \sum_{j=1}^{m-1} u_{mj} h_j, t + h \sum_{j=1}^{m-1} u_{mj} \right)$$

i parametri da determinare sono

$$m + \frac{m(m-1)}{2}$$

Caso $\boxed{m=1}$

1 parametro

$$y(t+h) = y(t) + \alpha_1 h_1$$

$$h_1 = h f(y, t)$$

$$y(t+h) = y(t) + h f(y, t)$$

Confrontando con lo sviluppo in serie di Taylor osservare che è il metodo di Euler

Caso $m=2$

3 parametri

$$y(t+h) = y(t) + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$$

con

$$h_1 = h f(y, t)$$

$$h_2 = h f(y + v_{21} h_1, t + v_{21} h)$$

Dobbiamo determinare i coefficienti α_1, α_2 e v_{21}

Esprimere lo sviluppo in serie di Taylor al II ordine

$$y(t+h) = y(t) + h f(y, t) + \frac{h^2}{2} \left[f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{df}{dt} \right] + O(h^3)$$

La nostra soluzione è

$$y(t+h) = y(t) + \alpha_1 h f(y, t) + \alpha_2 h f(y + v_{21} h_1, t + v_{21} h)$$

$$= y(t) + \alpha_1 h f(y, t) + \alpha_2 h \left[f(y, t) + v_{21} h_1 \frac{\partial f}{\partial y} + v_{21} h \frac{\partial f}{\partial t} \right]$$

$$= y(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) h f(y, t) + \alpha_2 h h_1 v_{21} \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_2 h v_{21} h \frac{\partial f}{\partial t}$$

$\searrow$
 $h f$

$$= y(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) h f(y, t) + v_{21} \alpha_2 h^2 \left[f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{df}{dt} \right]$$

Affinché i due sviluppi non vengano dove essere

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esistono due possibilità (almeno)

1

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y(t+h) = y(t) + h_2$$

$$h_1 = h f(y, t)$$

$$h_2 = h f\left(y + \frac{h_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right)$$

È il metodo introdotto precedentemente

2

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}$$

$$h_1 = h f(y, t)$$

$$h_2 = h f(y + h_1, t + h)$$

Algoritmo di Runge-Kutta al 4° ordine

$m=4$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{6} (h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4) + O(h^5)$$

$$h_1 = h f(y, t)$$

$$h_2 = h f\left(y + \frac{h_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right)$$

$$h_3 = h f\left(y + \frac{h_2}{2}, t + \frac{h}{2}\right)$$

$$h_4 = h f(y + h_3, t + h)$$