LEZ 4

Calcolo numerico di potenziali e campi elettrici.

In una regione dello spazio senza cariche elettriche il potenziale obbedisce all'eq. di Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

L'eq. che vogliamo risolvere è alle derivate parziali (PDE $\equiv$ partial differential equation).

Non esistono metodi "general purpose" che permettono di risolvere PDE. Si utilizzano vari approcci che dipendono dal tipo di equazione che si intende risolvere.

L'eq. di Laplace (come quella di Poisson) ricade sotto il tipo di eq. ellittiche (dalla forma delle soluzioni)

$$\nabla^2 u(x,y,z) = \rho(x,y,z)$$ eq. di Poisson

nel caso in cui $\rho = 0 \Rightarrow$ eq. di Laplace $\nabla^2 u = 0$

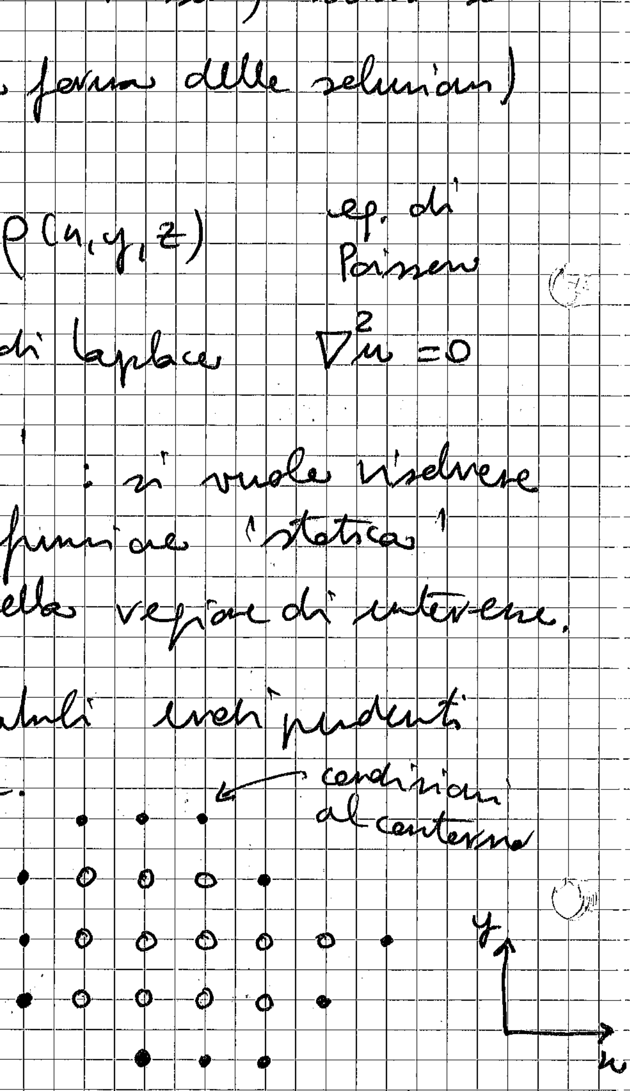
È un 'boundary values problem': si vuole risolvere l'equazione e trovare una funzione 'statica' (non dipendente dal tempo) nella regione di interesse.

Si usa 'discretizzare' le variabili indipendenti definendo una griglia spaziale.

Nel caso di due dimensioni:

$x = i\,\Delta x$

$y = j\,\Delta y$



Si vuole determinare $V(i,j) \equiv V(i\Delta x, j\Delta y)$

Utilizzando nuovamente lo sviluppo ~~in~~ in serie di Taylor definiamo le derivate parziali

$$(1)\quad V(x+\Delta x, y, z) = V(x,y,z) + \Delta x \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x,y,z} + \frac{\Delta x^2}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x,y,z} + O(\Delta x^3)$$

$x-\Delta x \qquad x \qquad x+\Delta x$

Data la griglia, e lo sviluppo in serie si definisce derivata in avanti

$$\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x,y,z)}{\Delta x} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x,y,z} + O(\Delta x)$$

Analogamente si può scrivere la derivata all'indietro

$$(2)\quad V(x-\Delta x, y, z) = V(x,y,z) - \Delta x \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x,y,z} + \frac{\Delta x^2}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x,y,z} + O(\Delta x^3)$$

Dallo sviluppo in serie (2)

$$\cancel{\frac{V(x-\Delta x, y, z) - V(x,y,z)}{\Delta x} =}$$

$$\frac{V(x,y,z) - V(x-\Delta x, y, z)}{\Delta x} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x,y,z} + O(\Delta x)$$

Considerando la differenza (1) − (2)

$$V(x+\Delta x, y, z) - V(x-\Delta x, y, z) = 2\Delta x \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x,y,z} + O(\Delta x^3)$$

Si può quindi definire la derivata come

$$\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x-\Delta x, y, z)}{2\Delta x} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x,y,z} + O(\Delta x^2)$$

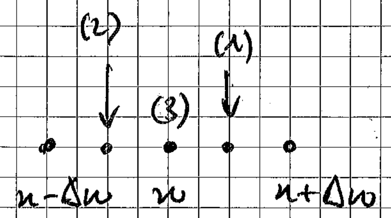
Ricapitolando, abbiamo scritto la derivata prima sulla griglia in 3 modi diversi

$$(1) \quad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x+\frac{\Delta x}{2}} = \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}$$, in avanti

$$(2) \quad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x-\frac{\Delta x}{2}} = \frac{V(x, y, z) - V(x-\Delta x, y, z)}{\Delta x}$$, all'indietro

e infine

$$(3) \quad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x} = \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x-\Delta x, y, z)}{2\Delta x}$$



Calcoliamo ora la derivata seconda

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \sim \frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - \frac{V(x, y, z) - V(x-\Delta x, y, z)}{\Delta x}\right]$$

$$= \frac{V(x+\Delta x, y, z) - 2V(x, y, z) + V(x-\Delta x, y, z)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

Inseriamo ora le espressioni ottenute per la derivata seconda nell'eq. di Laplace.
Per semplicità di scrittura definiamo

$$V(i,j,k) = V(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{V(i+1,j,k) - 2V(i,j,k) + V(i-1,j,k)}{(\Delta x)^2} +$$

$$\frac{V(i,j+1,k) - 2V(i,j,k) + V(i,j-1,k)}{(\Delta y)^2} +$$

$$\frac{V(i,j,k+1) - 2V(i,j,k) + V(i,j,k-1)}{(\Delta z)^2} = 0$$

Supponendo di aver discretizzato lo spazio in maniera uniforme $\Delta x = \Delta y = \Delta z$
si può riscrivere l'eq. come

$$V(i,j,k) = \frac{1}{6}\Big[V(i+1,j,k) + V(i-1,j,k) + V(i,j+1,k) + V(i,j-1,k) + V(i,j,k+1) + V(i,j,k-1)\Big]$$

La strategia numerica per risolvere il potenziale impone di procedere per iterazioni successive, partendo dalle condizioni al contorno, evolvendo il sistema

$$V_0(i,j,k) \rightarrow V_1(i,j,k) \rightarrow V_2(i,j,k)$$

Il processo iterativo continua fino a che il risultato non soddisfa un qualche criterio di convergenza.

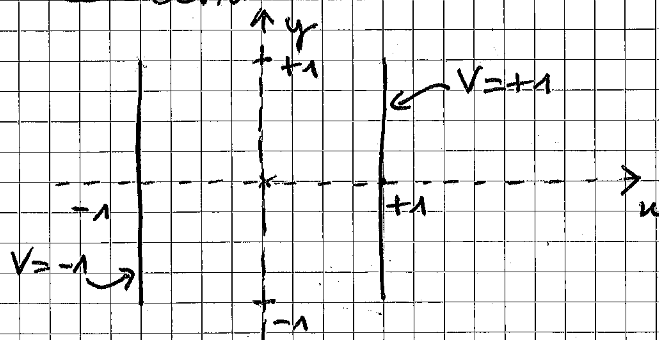
Questo tipo di approccio generale si inserisce nella categoria dei 'metodi di ~~rilassa~~ rilassamento'

Le varie ~~iterazioni~~ implementazioni differiscono per velocità di convergenza.

Il metodo descritto si chiama metodo di Jacobi.
Funziona in maniera ragionevole purché la funzione di prova V_0 non sia troppo diversa da quella finale.

Esempi

Calcolo del potenziale e del campo elettrico tra le armature di un condensatore



$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left[V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} \right]$$

Algoritmo

1) $$V_{n+1}(i,j) = \frac{1}{4}\left[V_n(i+1,j) + V_n(i-1,j) + V_n(i,j-1) + V_n(i,j+1) \right]$$

2) per ogni step calcolo

$$\Delta V \mathrel{+}= \left| V_n(i,j) - V_{n+1}(i,j) \right|$$

La somma delle variazioni ΔV permette di definire un qualche criterio di convergenza e di decidere quando terminare l'evoluzione.

Per il calcolo del campo

$$E = -\nabla V \qquad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_x(i,j) = -\frac{V(i+1,j) - V(i-1,j)}{2\Delta x}$$

$$E_y(i,j) = -\frac{V(i,j+1) - V(i,j-1)}{2\Delta y}$$

le equazioni scritte permettono di calcolare il campo elettrico all'interno della griglia. Nelle regioni di confine, vicino alle condizioni al contorno, si userà una formula asimmetrica per la derivata (in avanti o all'indietro)

Altri esercizi: