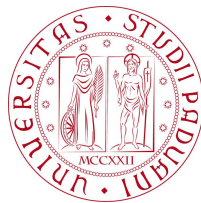


Equazioni Differenziali Ordinarie per i Circuiti Elettrici: soluzioni con metodi di Runge-Kutta

Alberto Garfagnini

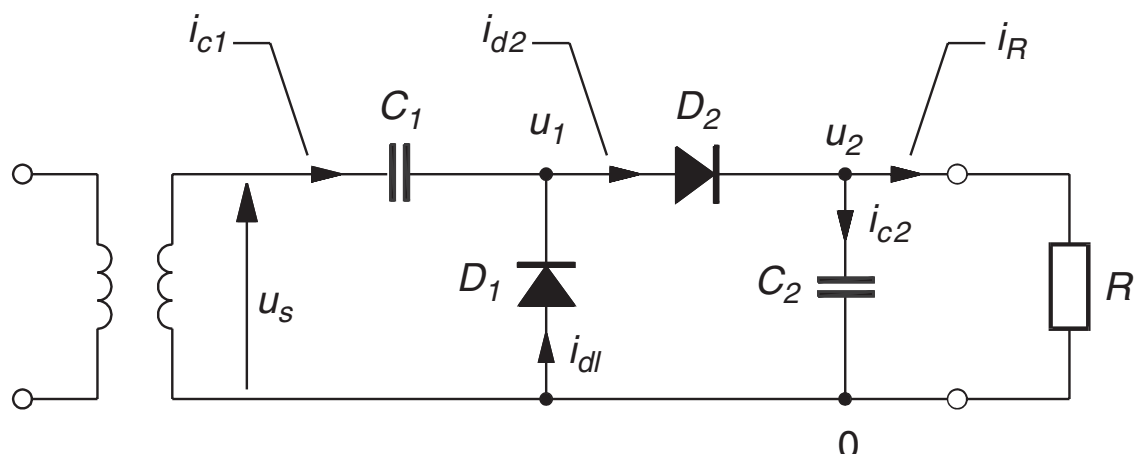
Università degli studi di Padova

21 Ottobre 2013



Es. 1 Circuito duplicatore di tensione

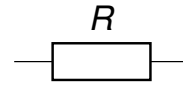
- Il circuito riportato è un duplicatore di tensione asimmetrico, chiamato anche **circuito di Villard**
- La tensione in ingresso è alternata del tipo
$$u_s(t) = 5 \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$
- **Calcolare l'andamento della tensione sulla resistenza di carico R in funzione del tempo**



Equazioni per gli elementi del circuito

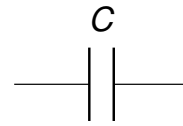
- per una resistenza:

$$i = \frac{V}{R}$$



- per un condensatore:

$$i = C \frac{dV}{dt}$$



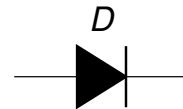
- per una induttanza:

$$V = L \frac{di}{dt}$$



- per un diodio:

$$i = I_S [\exp(V/V_T) - 1]$$



- Leggi di Kirchhoff:

$$\sum_{\text{nodo}} i_{in} = \sum_{\text{nodo}} i_{out}, \quad \sum_{\text{circuito}} V_j = 0$$

Equazioni del circuito

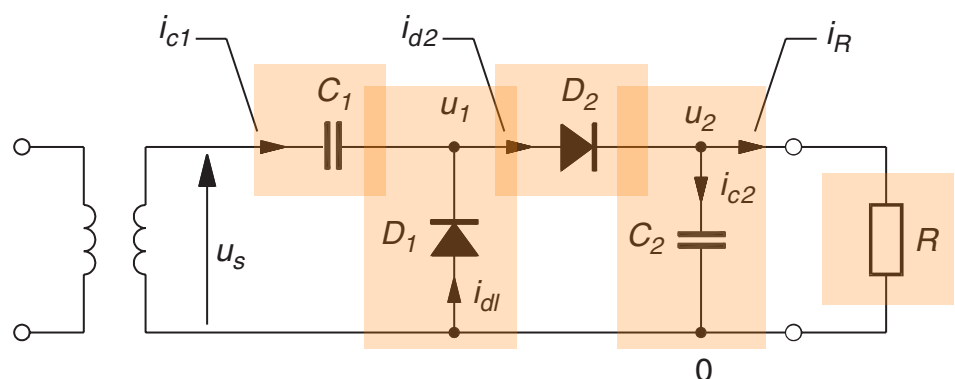
$$i_{C_1} = C_1 \frac{d(u_s - u_1)}{dt}$$

$$i_{D_1} = I_S [\exp(-u_1/V_T) - 1]$$

$$i_{D_2} = I_S [\exp((u_1 - u_2)/V_T) - 1]$$

$$i_{C_2} = C_2 \frac{du_2}{dt}$$

$$i_R = \frac{u_2}{R}$$



Equazioni del circuito

- Scrivendo le equazioni di Kirchoff ai nodi u_1 e u_2 :

$$i_{C_1} + i_{D_1} - i_{D_2} = 0$$

$$i_{D_2} - i_{C_2} - i_R = 0$$

- e definendo

$$x \equiv u_1 \quad \text{e} \quad y \equiv u_2 ,$$

- si ottengono le equazioni accoppiate

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y, t) = \frac{du_s}{dt} + \frac{I_S}{C_1} \left(e^{-x/V_T} - 1 \right) - \frac{I_S}{C_1} \left(e^{(x-y)/V_T} - 1 \right) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y, t) = \frac{I_S}{C_2} \left(e^{(x-y)/V_T} - 1 \right) - \frac{y}{RC_2} \end{aligned}$$

Metodo numerico: Runge-Kutta del IV ordine

- Scriviamo lo schema per x e y

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$k_1 = hf_1(x_n, y_n, t_n)$$

$$l_1 = hf_2(x_n, y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf_1(x_n + k_1/2, y_n + l_1/2, t_n + h/2)$$

$$l_2 = hf_2(x_n + k_1/2, y_n + l_1/2, t_n + h/2)$$

$$k_3 = hf_1(x_n + k_2/2, y_n + l_2/2, t_n + h/2)$$

$$l_3 = hf_2(x_n + k_2/2, y_n + l_2/2, t_n + h/2)$$

$$k_4 = hf_1(x_n + k_3, y_n + l_3, t_n + h)$$

$$l_4 = hf_2(x_n + k_3, y_n + l_3, t_n + h)$$

Duplicatore di tensione: soluzione numerica

- Calcoliamo l'evoluzione delle tensioni nel circuito con le condizioni al contorno:

$$x(0) = y(0) = 0$$

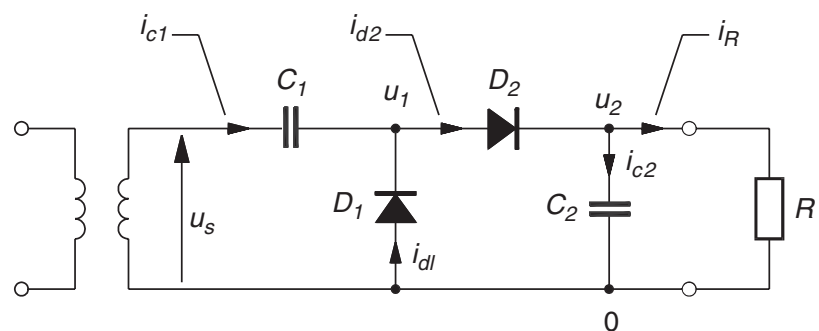
$$u_s(t) = 5 \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

$$R = 10 \text{ k}\Omega$$

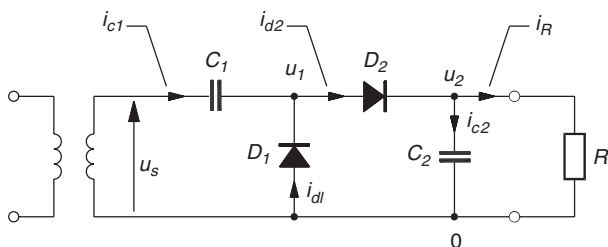
$$C_1 = C_2 = 1 \text{ mF}$$

$$I_S = 10^{-8} \text{ A}, V_T = 26 \text{ mV}$$

Determinare $u_1(t)$ e $u_2(t)$



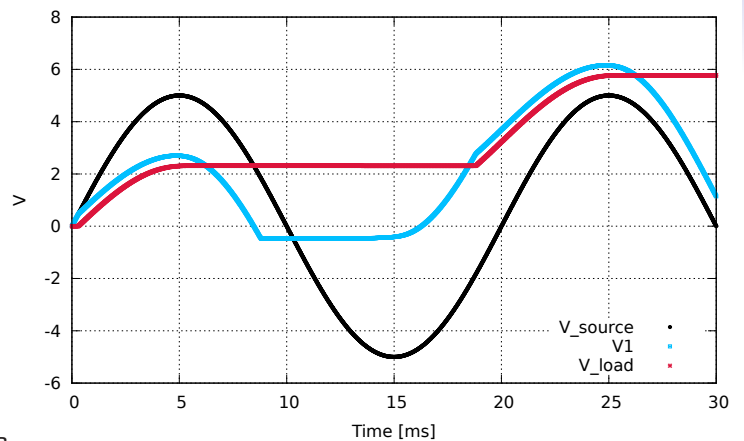
Transiente iniziale



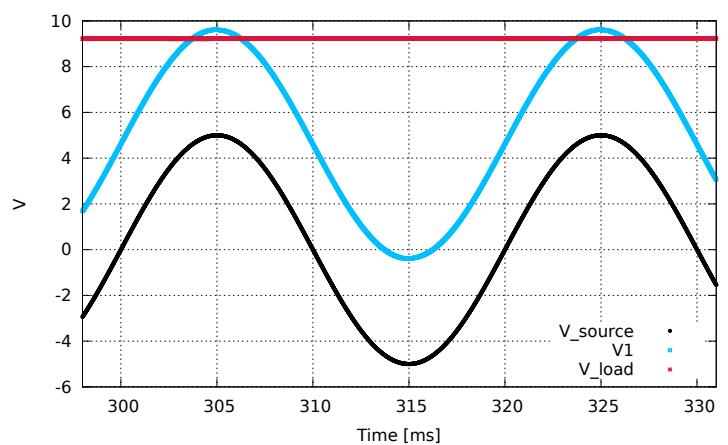
Black $\Rightarrow V_{source}$

Blue $\Rightarrow V_1$

Red $\Rightarrow V_2 = V_R$



Condizioni stazionarie



Es. Raddrizzatore Full-Wave con Filtro Passa Basso

- Il circuito riportato è un rettificatore di corrente alternata con un filtro passa-basso a tree elementi
- La tensione in ingresso è alternata del tipo
$$u_s(t) = 5 \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$
- Calcolare l'andamento della tensione sulla resistenza di carico R in funzione del tempo

