

Soluzioni numeriche delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

PDE $\equiv$ Partial Differential Equation

Matematicamente è possibile classificare le PDE in base alle famiglie di curve che risultano dalle soluzioni.

Di seguito considereremo in dettaglio:

- equazioni iperboliche
es. eq. delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

- equazioni paraboliche
es. eq. della diffusione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

- equazioni ellittiche
es. eq. di Poisson
in due dimensioni:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(x, y) \quad (3)$$

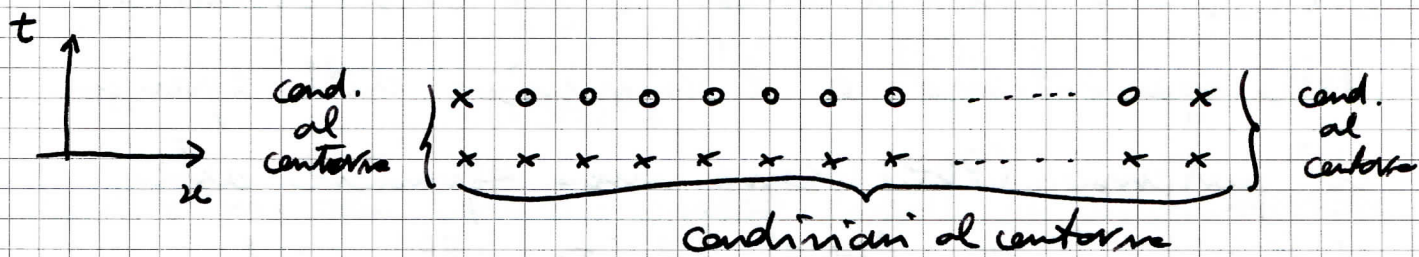
Dal punto di vista computazionale, la classificazione introdotta non è molto importante.

I problemi da risolvere si possono dividere in

- a) "Initial Values" o problemi di Cauchy

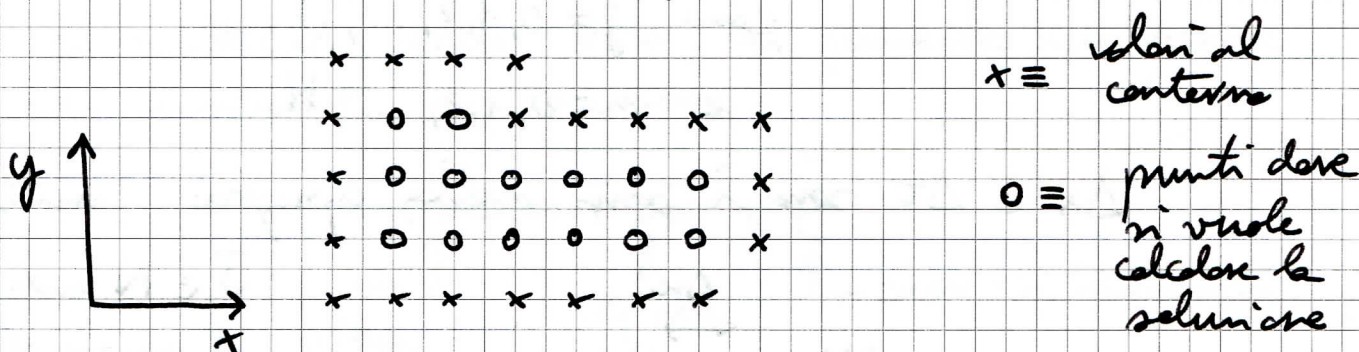
↳ abbiamo l'informazione sui valori del campo u e magari della sua derivata prima $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ all'istante iniziale $t = t_0$.

Si vuole calcolare l'evoluzione $u(x, t)$ per esempio con le equazioni (1) e (2)



b) "Boundary Value" problems

↳ si vuole risolvere, per esempio l'eq. (3) e trovare una soluzione 'statica' $u(x, y)$ nella regione di interesse



Esistono svariati metodi che permettono di ~~calcolare~~ risolvere numericamente le PDE:

- metodi alle differenze finite
- metodi agli elementi finiti
- metodi spettrali
- metodi variazionali
- metodi di Monte Carlo

In questa lezione affronteremo i metodi alle differenze finite e deriveremo alcuni schemi che applicheremo all'equazione delle onde e all'equazione della diffusione.

L'idea alla base del metodo è la discretizzazione dello spaziotempo e l'espressione dell'equazione di partenza (PDE) come una equazione alle differenze finite (FDE) calcolate sulla griglia.

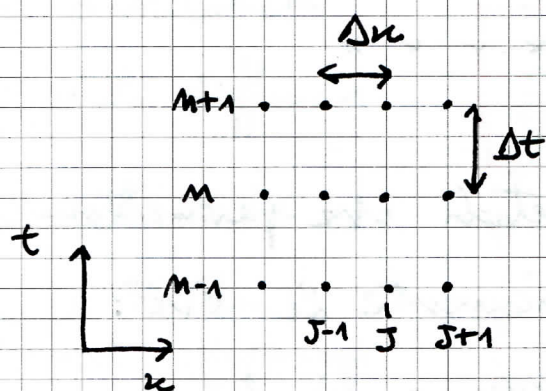
La soluzione $u(x, t)$ sarà ricercata sulla griglia come

$$u_j^m \equiv u(x + j\Delta x; t + m\Delta t)$$

con $j = 0, 1, 2, \dots, J$

e $m = 0, 1, 2, \dots, N$

Δx e Δt sono i passi della griglia, mentre



J e N indicano il numero di punti sulla griglia per le due dimensioni

Riscriviamo le derivate prime e seconde secondo gli schemi adottati per le eq. differenziali ordinarie

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{m+\frac{1}{2}, j} = \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad \text{FORWARD-DIFFERENCE}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{m-\frac{1}{2}, j} = \frac{u_j^m - u_j^{m-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad \text{BACKWARD-DIFFERENCE}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{m, j} = \frac{u_j^{m+1} - u_j^{m-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad \text{CENTRAL-DIFFERENCE}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

Andiamo ora alcuni aspetti legati all'approssimazione di una equazione alle derivate parziali con tramite una equazione alle differenze finite.

1) ERRORE DI TRONCAMENTO

Nella discretizzazione della spaziale tempo e con la scrittura delle FDE, si commette un errore di troncamento ϵ tale che

$$\text{eq. di partenza} \uparrow \quad \text{eq. alle differenze finite} \uparrow \quad \text{errore di troncamento} \uparrow$$

$$\text{PDE} = \text{FDE} + \epsilon$$

Per ogni punto della griglia, questo significa:

$$\cancel{u(x, t_m)} - u_j^m = \epsilon_j^m$$

$\uparrow$ soluzione esatta calcolata sulla griglia $\uparrow$ soluzione approssimata ottenuta con lo schema

$\nwarrow$ singolo errore di troncamento

2) CONVERGENZA

La soluzione approssimata è convergente se si avvicina alla soluzione esatta quando le dimensioni della griglia tendono a zero

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} u(x, t_m) - u_j^m = 0$$

Lo schema utilizzato si dice CONSISTENTE se la soluzione approssimata 'recupera' quella esatta nel limite di spaziatura nulla dei punti della griglia.

Uno schema CONSISTENTE porta porta ad una soluzione CONVERGENTE

In aggiunta all'errore di troncamento introdotto dal processo di discretizzazione, ci possono essere altre sorgenti di errore nella soluzione approssimata. Round-off errors, derivanti dall'aritmetica a precisione finita nei calcoli a virgola mobile possono entrare in gioco nel processo di soluzione numerica dell'equazione di partenza.

3) STABILITÀ

Una soluzione numerica è stabile se gli errori dovuti alle approssimazioni diminuiscono durante il processo numerico e non influenzano quindi la soluzione trovata.

Il TEOREMA di EQUIVALENZA di LAX afferma che

Uno schema alle differenze finite che soddisfi le condizioni di CONSISTENZA e STABILITÀ necessariamente converge alla soluzione cercata.

Studiamo ora l'eq. delle onde in una dimensione.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

L'eq. può essere riscritta come

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 = \left[\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] u$$

Per ottenere le soluzioni possiamo quindi studiare le due equazioni del I ordine equivalenti sopra scritte.

Consideriamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

la soluzione esatta dell'eq. nel caso delle condizioni iniziali

$$u(x, 0) = f(x) \quad -\infty < x < +\infty$$

è data da

$$u(x, t) = f(x - vt)$$

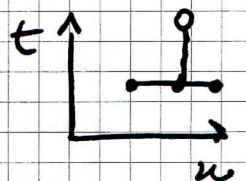
Cerchiamo una soluzione con uno schema alle differenze finite

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = -v \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x}$$

Lo schema introduce errori di troncamento $O[\Delta x^2, \Delta t]$

Introducendo $r = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$u_j^{m+1} = u_j^m - \frac{r}{2} [u_{j+1}^m - u_{j-1}^m]$$



lo schema è esplicito : è possibile scrivere u_j^{n+1} in funzione di u calcolate al tempo n .

lo schema prende il nome di FTCS

Forward Time Centered Space

Dato che l'errore di troncamento è $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$

nel ~~$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \text{costante}$~~

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} u(x_j, t_n) - u_j^n = 0$$

pertanto è uno schema consistente.

Vogliamo ora studiare la stabilità dello schema
tramite il criterio di stabilità di von NEUMANN

Scriviamo l'errore commesso dall'approssimazione
della PDE con la FDE su i punti della
griglia come

$$e_j^n = u_j^n - M(x_j, t_n)$$

~~Vogliamo~~

Vogliamo controllare l'andamento dell'errore
con il tempo.

Si può far vedere che sia la soluzione esatta
che l'errore devono entrambi soddisfare
l'eq. alle differenze finite.

Ciò significa che sia l'errore che la soluzione
numerica devono possedere lo stesso andamento
nel tempo.

La distribuzione dell'errore sulla griglia
può essere scomposta nelle spaziali di Fourier
come

$$E_j^M = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi^m e^{i h_j \Delta x}$$

con $h \equiv$ numero d'onda nello spazio di Fourier
e ξ^m numero complesso.

Dato che il sistema è lineare possiamo considerare una componente alla volta

$$E_j^M = \xi^M e^{i h_j \Delta x}$$

e sostituirla nell'eq. alle differenze finite:

$$\xi^{M+1} e^{i h_j \Delta x} = \xi^M e^{i h_j \Delta x} - \frac{r}{2} [e^{i h_j \Delta x} - e^{-i h_j \Delta x}] \xi^M e^{i h_j \Delta x}$$

Si definisce ^{fattore} ~~rappato~~ di amplificazione il rapporto

$$g = \frac{\xi^{M+1}}{\xi^M}$$

La condizione di stabilità implica che l'errore debba diminuire nel tempo e che pertanto

$$\left| \frac{\xi^{M+1}}{\xi^M} \right| \leq 1$$

Calcolare il rapporto di amplificazione per lo scheme FTCS

$$g = \frac{\xi^{M+1}}{\xi^M} = 1 - \frac{r}{2} [e^{i h_j \Delta x} - e^{-i h_j \Delta x}]$$

$$g = 1 - i r \sin(hu)$$

$$|g|^2 = 1 + r^2 \sin^2(hu)$$

Ma poiché $r = v \frac{\Delta t}{\Delta u} \neq 0$ segue che lo scheme FTCS è instabile.
Pertanto la soluzione cercata diverge.

L'instabilità del metodo può essere 'curata' con una semplice modifica dovuta a **LAX**

È necessario impiantare il termine u_j^m nello scheme FTCS con una media calcolata tra punti vicini:

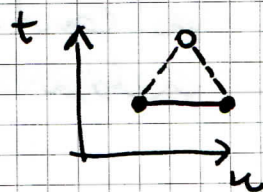
$$u_j^m \rightarrow \frac{u_{j+1}^m + u_{j-1}^m}{2}$$

Lo scheme di LAX diventa

$$u_j^{m+1} = \frac{u_{j+1}^m + u_{j-1}^m}{2} - \frac{r}{2} (u_{j+1}^m - u_{j-1}^m)$$

LAX

$$u_j^{m+1} = u_{j+1}^m \left(\frac{1-r}{2} \right) + u_{j-1}^m \left(\frac{1+r}{2} \right)$$



Verifichiamo la stabilità dello scheme con il criterio di von Neumann:

$$\xi^{m+1} = \xi^m e^{i h \Delta x \left(\frac{1-r}{2} \right)} + \xi^m e^{-i h \Delta x \left(\frac{1+r}{2} \right)}$$

Calcoliamo il ~~rapporto~~ fattore di amplificazione

$$\frac{\xi^{m+1}}{\xi^m} = \frac{e^{i h \Delta x} + e^{-i h \Delta x}}{2} - i r \frac{e^{i h \Delta x} - e^{-i h \Delta x}}{2i}$$

$$g = \cos(h\Delta n) - crnm(h\Delta n)$$

$$|g|^2 = \cos^2(h\Delta n) + r^2 nm^2(h\Delta n)$$

la condizione di stabilità $|g|^2 \leq 1$
 si riduce a

$$|r| = \frac{|v|\Delta t}{\Delta n} \leq 1$$

la condizione prende il nome di criterio di stabilità di COURANT-FRIEDRICHS-LEWY.

Discutiamo infine il significato fisico della modifica proposta da LAX allo schema FICS.

la sostituzione $u_j^m \rightarrow \frac{1}{2}(u_{j+1}^m + u_{j-1}^m)$ ha aggiunto, a tutti gli effetti, un termine di diffusione nell'eq. DFE di partenza.

Ripartiamo dallo schema di LAX sottraendo u_j^m da ambo i membri

$$u_j^{m+1} - u_j^m = \frac{u_{j+1}^m + u_{j-1}^m}{2} - u_j^m - \frac{v}{2}(u_{j+1}^m - u_{j-1}^m)$$

L'eq. si può scrivere come

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta n)^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} - v \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta n}$$

che è lo schema dell'eq.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - v \frac{\partial u}{\partial n}$$

All'eq. di partenza, $\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial n}$ è stata aggiunta un termine dissipativo $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$

Lo scheme di LAX introduce un termine di 'dissipazione numerica' o di 'viscosità numerica'.

I due schemi introdotti per risolvere l'eq. lineare delle onde sono accurati al primo ordine nel tempo.

Uno schema che utilizzi una derivata temporale accurata al secondo ordine è lo schema **STAGGERED LEAP-FROG**

Partendo dall'eq. delle onde
possiamo scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^{m-1}}{2\Delta t} = -v \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x}$$

$$u_j^{m+1} = u_j^{m-1} - r(u_{j+1}^m - u_{j-1}^m)$$

Lo schema ha un errore di troncamento $\mathcal{O}[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$

Applichiamo il criterio di stabilità di von Neumann

$$\xi^{m+1} = \xi^{m-1} - r \xi^m [e^{i h \Delta x} - e^{-i h \Delta x}]$$

che conduce a

$$\xi^2 + 2i r \sin(h \Delta x) \xi - 1 = 0$$

$$\xi = -i r \sin(h \Delta x) \pm \sqrt{1 - r^2 \sin^2(h \Delta x)}$$

$$|\xi|^2 = 1 - r^2 \sin^2(h \Delta x) + r^2 \sin^2(h \Delta x) = 1$$

LO SCHEMA È INCONDIZIONATAMENTE STABILE.