

LEZ

- Potremmo discutere l'equazione della diffusione e cerchiamo le soluzioni con schemi alle differenze finite.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

D rappresenta il coefficiente di diffusione. Supponendo D costante potremmo scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Assumeremo $D > 0$ in quanto per valori negativi l'eq. presenta soluzioni finemente instabili.

Una semplice equazione FDE è

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2}$$

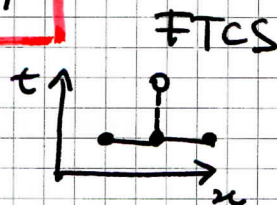
Imponiamo $s = D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ e riscriviamo la FDE

$$u_j^{m+1} = u_j^m (1-2s) + s(u_{j+1}^m + u_{j-1}^m)$$

Lo schema FTCS è uno schema esplicito

L'errore commesso con l'approssimazione

$$\mathcal{O}[\Delta t, (\Delta x)^2]$$



Verifichiamo la stabilità dello schema con il criterio di von Neumann

$$\xi^{m+1} = \xi^m (1-2s) + s \xi^m (e^{i k \Delta x} - e^{-i k \Delta x})$$

Calcolare il fattore di amplificazione

$$g = \frac{g^{n+1}}{g^n}$$

$$\begin{aligned} g &= (1-2s) + 2s \frac{e^{h\Delta x} + e^{-h\Delta x}}{2} \\ &= (1-2s) + 2s \cos(h\Delta x) \\ &= 1 + 2s [\cos(h\Delta x) - 1] \end{aligned}$$

ma $\frac{1 - \cos x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$

$$g = 1 - 4s \sin^2 \frac{h\Delta x}{2}$$

$$|g|^2 \leq 1 \Rightarrow \left| 1 - 4s \sin^2 \frac{h\Delta x}{2} \right|^2 \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Se } 4s = 2 &\Rightarrow \left| 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{h\Delta x}{2} \right) \right|^2 = |1 - 1 + \cos h\Delta x|^2 \\ &= |\cos h\Delta x| \leq 1 \end{aligned}$$

Quindi

$$4s \leq 2 \Rightarrow s \leq \frac{1}{2}$$

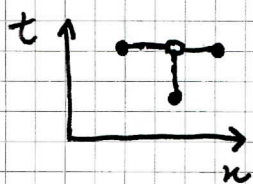


$$2D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{D}$$

Considerare ora altri schemi per risolvere l'eq. della diffusione

Uno schema proposto da Laasoren nel 1949

considera la derivata spaziale al tempo $n+1$



$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

L'errore di troncamento è proporzionale a $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$

↳ schema è implicito.

Verifichiamo la stabilità con il criterio di von Neumann

$$u_j^{n+1} = u_j^n + s [u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}]$$

$$u_j^{n+1} \frac{s}{2} (1 + 2s) - s (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

$$\xi^{n+1} [1 + 2s - s e^{i h \Delta x} - s e^{-i h \Delta x}] = \xi^n$$

$$\xi^{n+1} [1 - 2s (\cos(h \Delta x) - 1)] = \xi^n$$

Calcoliamo il rapporto di amplificazione

$$g = \frac{\xi^{n+1}}{\xi^n} = \frac{1}{1 + 2s [1 - \cos(h \Delta x)]}$$
$$= \frac{1}{1 + 4s \sin^2\left(\frac{h \Delta x}{2}\right)}$$

↳ schema è incondizionatamente stabile.

↳ schema è anche identificabile come FULLY IMPLICIT

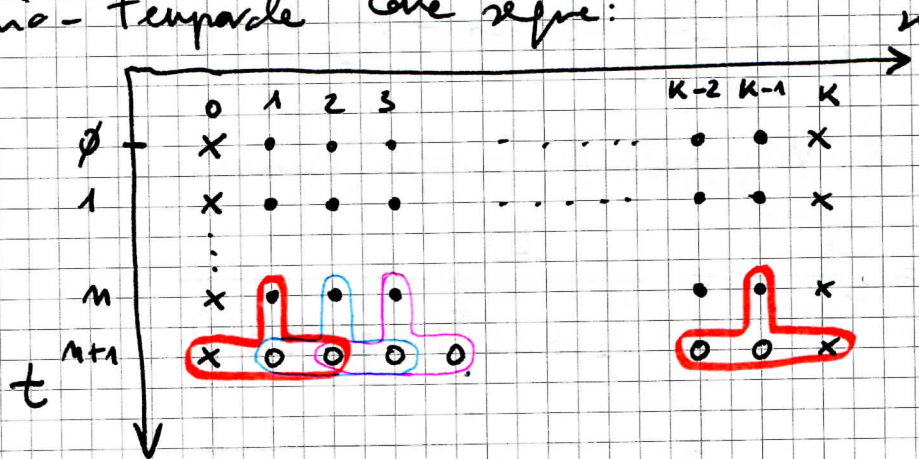
Riscriviamo l'eq. FDE separando le parti al tempo n e al tempo $n+1$:

$$u_j^n = u_j^{n+1} - s [u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}]$$
$$= -s u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2s) u_j^{n+1} - s u_{j-1}^{n+1}$$

Convincente ad un sistema di equazioni lineari

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^m = u_0^{m+1} \\ u_1^m = -s u_2^{m+1} + (1+2s) u_1^{m+1} - s u_0^{m+1} \\ u_2^m = -s u_3^{m+1} + (1+2s) u_2^{m+1} - s u_1^{m+1} \\ \vdots \\ u_{k-1}^m = -s u_k^{m+1} + (1+2s) u_{k-1}^{m+1} - s u_{k-2}^{m+1} \\ u_k^m = u_k^{m+1} \end{array} \right.$$

Dove i punti $0, 1, \dots, k$ sono definiti nella griglia spazio-temporale come segue:



Il sistema può essere scritto in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} u_0^m \\ u_1^m \\ u_2^m \\ \vdots \\ u_{k-2}^m \\ u_{k-1}^m \\ u_k^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ -s & (1+2s) & -s & & & \\ 0 & -s & (1+2s) & -s & & \\ 0 & 0 & -s & (1+2s) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -s & 0 \\ & & & & & 0 & -s & (1+2s) & -s \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{m+1} \\ u_1^{m+1} \\ u_2^{m+1} \\ \vdots \\ u_{k-2}^{m+1} \\ u_{k-1}^{m+1} \\ u_k^{m+1} \end{pmatrix}$$

È possibile scrivere il sistema invertendo la matrice che ha una forma tri-diagonale.

È possibile infine descrivere la derivata spaziale come somma pesata di due contributi, uno al tempo n ed uno al tempo $n+1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \left\{ \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right\}$$

dove θ è un numero reale $0 \leq \theta \leq 1$

Per cui

$\theta = 0 \rightarrow$ schema esplicito FTCS $\frac{\text{Error}}{\mathcal{O}[\Delta t, (\Delta x)^2]}$

$\theta = 1 \rightarrow$ schema implicito $\mathcal{O}[\Delta t, (\Delta x)^2]$

$\theta = \frac{1}{2} \rightarrow$ schema Crank-Nicolson $\mathcal{O}[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$

Consideriamo il caso $\theta = \frac{1}{2}$ e verifichiamo la stabilità con il criterio di von Neumann

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{D}{2(\Delta x)^2} \left\{ u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n \right\}$$

$$r \equiv D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

verifichiamo la stabilità

$$\xi^{n+1} - \xi^n = \frac{r}{2} \left\{ \xi^{n+1} (e^{i\Delta x} - 2 + e^{-i\Delta x}) + \xi^n (e^{i\Delta x} - 2 + e^{-i\Delta x}) \right\}$$

$$\xi^{m+1} - \xi^m = \frac{r}{2} \left\{ 2\xi^{m+1} (\cosh \Delta x - 1) + 2\xi^m (\cosh \Delta x - 1) \right\}$$

$$\xi^{m+1} \left[1 + 2r \sin^2 \frac{h\Delta x}{2} \right] = \xi^m \left[1 - 2r \sin^2 \frac{h\Delta x}{2} \right]$$

Il fattore di amplificazione è

$$g = \frac{\xi^{m+1}}{\xi^m} = \frac{1 - 2r \sin^2 \left(\frac{h\Delta x}{2} \right)}{1 + 2r \sin^2 \left(\frac{h\Delta x}{2} \right)}$$

ma $|g|^2 \leq 1 \quad \forall r$ e quindi lo schema è incondizionatamente stabile.

Ritornando alla ~~schema~~ schema generale è possibile derivare che:

- lo schema è incondizionatamente stabile

$$\text{e} \quad \boxed{\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1}$$

- e $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ lo schema è stabile purché

$$\boxed{0 \leq \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2-4\theta}}$$