

LEZ

Calcolo di polinomi all'interno di un programma.

Un polinomio di grado N è generalmente rappresentato in un programma tramite un array che contiene i valori dei suoi coefficienti.

Es. polinomio di grado 3: `double a[4];`

Non calcolate mai il valore che un polinomio assume in un punto con le espressioni seguenti:

$$p_3 = a[0] + a[1] * x + a[2] * x * x + a[3] * x * x * x; \quad \text{NO}$$

↳ 6 prodotti e 6 somme

oppure

$$p_3 = a[0] + a[1] * x + a[2] * \text{pow}(x, 2.0) + a[3] * \text{pow}(x, 3.0); \quad \text{NO!!}$$

Si descriva invece il polinomio come

$$p = a[0] + x (a[1] + x (a[2] + x a[3]))$$

È possibile esprimervelo tramite una somma ricorsiva

```
double p = a[n-1];  
for (int l = n-2; l >= 0; l--) {  
    p = p * x + a[l];  
}
```

```
double p = a[n-1];  
int j = n-1;  
while (j > 0) {  
    p = p * x + a[--j];  
}
```

Con lo stesso ciclo iterativo è possibile calcolare anche la derivata prima del polinomio

```

double p = a[n-1];
double dp = 0;
for (int j = n-2; j >= 0; j--) {
    dp = dp * x + p;
    p = p * x + a[j];
}

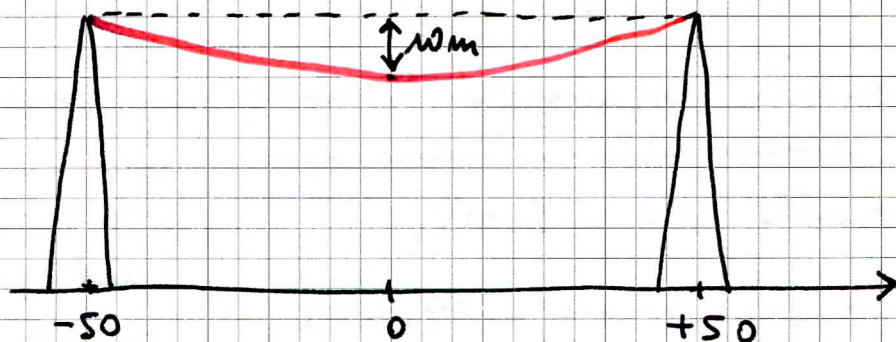
```

Il trucco utilizzato
richiama
divisione
rintetta.

Affrontiamo ora il calcolo delle radici di una equazione.

Esempio.

Un cavo elettrico viene sospeso tra due punti di egual altezza posti ad una distanza di 100 metri tra di loro. I punti di appancio del cavo sono sospesi a 50 metri di altezza rispetto al suolo. Nel punto intermedio il cavo si abbassa di 10 metri rispetto alla quota dei punti di fissaggio. Quanto è lungo il cavo?



L'eq. che descrive il cavo sospeso si chiama catenaria

$$y = \lambda \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

dove λ è il parametro da determinare

Le condizioni del problema sono

$$y(50) - y(0) = 10$$

$$\lambda \cosh\left(\frac{50}{\lambda}\right) = \lambda + 10$$

È necessario determinare il parametro λ $\left[\begin{array}{l} \text{soluzione: } \lambda = 126,632 \\ \text{cave} = 102,619 \text{ m} \end{array} \right]$

Il problema da affrontare è il seguente:

- data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- determinare x_r tale che $f(x_r) = 0$

x_r è detta radice dell'equazione di partenza.

Vogliamo sviluppare metodi numerici generici che non dipendano da particolari proprietà delle funzioni studiate e che permettano di calcolare le radici

Affronteremo tre metodi:

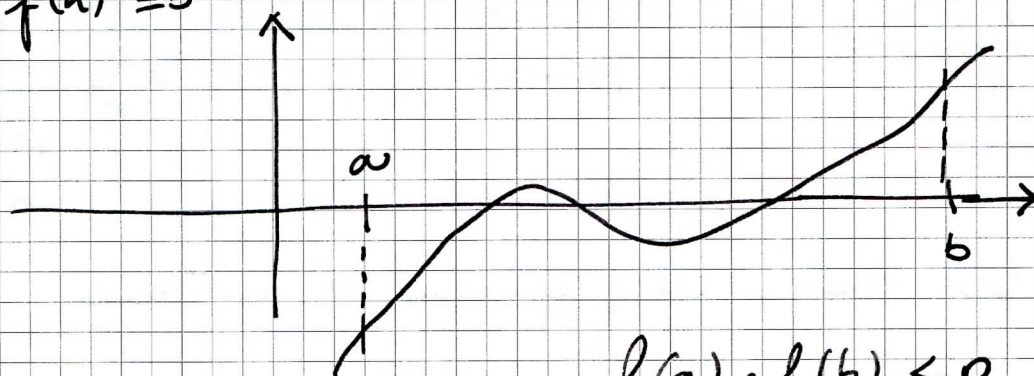
- metodo della bisezione;
- metodo di Newton-Raphson;
- metodo della secante

Metodo della bisezione

Sia $f(x)$ una funzione che assuma valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a, b]$.

Se $f(x)$ è continua all'interno di $[a, b]$, è sempre possibile determinare una soluzione

$$\text{a} \quad f(x) = 0$$



$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Il metodo della bisezione sfrutta le proprietà delle funzioni continue.

Algoritmo

1) si parte dall'intervallo $[a, b]$ dove

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

2) si calcoli il punto di mezzo dell'intervallo

$$c = \frac{a+b}{2}$$

e si calcoli $f(c)$

2.1) se $f(c) = 0 \Rightarrow$ abbiamo trovato la soluzione

2.2) se $f(a) \cdot f(c) < 0$

il nuovo intervallo da considerare

$$\bar{c} \quad [a, c] \quad \begin{cases} a = a \\ b = c \end{cases}$$

ripartire dal punto 2)

2.3) ^{altrimenti} se $f(c) \cdot f(b) < 0$

il nuovo intervallo da considerare

$$\bar{c} \quad [c, b] \quad \begin{cases} a = c \\ b = b \end{cases}$$

ripartire dal punto 2)

la procedura iterativa viene ripetuta fino a quando

$$|b-a| \leq 0.5 \cdot 10^{-6} = \epsilon$$

↑
precisione richiesta

la radice dell'equazione di partenza

sarà

$$x_r = \frac{a+b}{2}$$

Il metodo converge alla soluzione.

Un teorema afferma che

- se $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$
e $f(a) \cdot f(b) < 0$

dopo n passi iterativi, la radice della funzione considerata sarà calcolata con un errore che al più è

$$|e_{n+1}| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Il metodo converge linearmente.

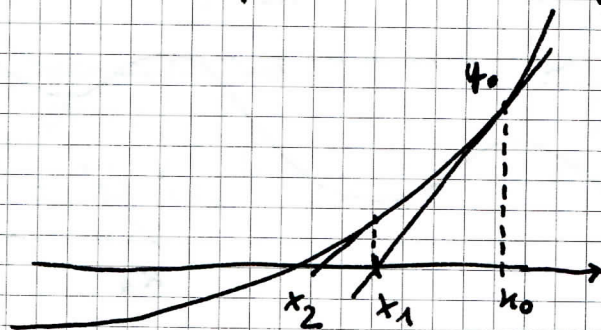
Spesso si utilizza il metodo della bisezione insieme ad altri metodi: il metodo permette di avvicinarsi alla radice cercata e successivamente si calcola la soluzione utilizzando metodi che convergono più rapidamente.

Metodo di Newton-Raphson

Si richiede che $f(x)$ sia continua e differenziabile

Date un punto sulla curva (x_0, y_0) si utilizza la tangente nel punto sulla curva come buona approssimazione della curva nella vicinanza del punto

$$l(x) = f(x) + (x - x_0) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$



Si assume che la serie di $l(n)$ sia una buona approssimazione della serie di $f(n)$

$$l(x_0) = 0 = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Il processo viene ripetuto iterativamente generando una sequenza

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

La sequenza $\{x_j\}$ converge quadraticamente ad x_r

$$|e_{j+1}| \leq C |e_j|^2$$

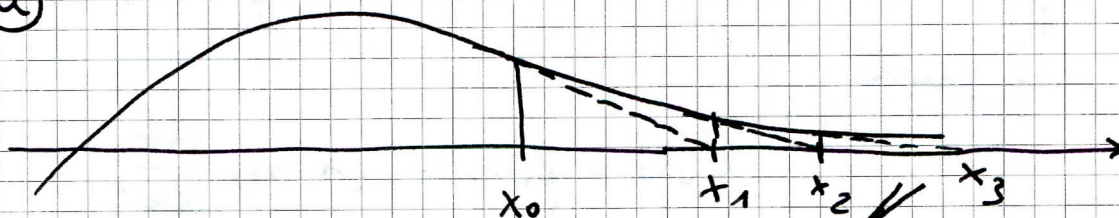
$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_r$$

Purtroppo il metodo di Newton non riesce sempre a trovare una soluzione.

Ci sono alcuni casi 'patologici' in cui non converge al risultato cercato.

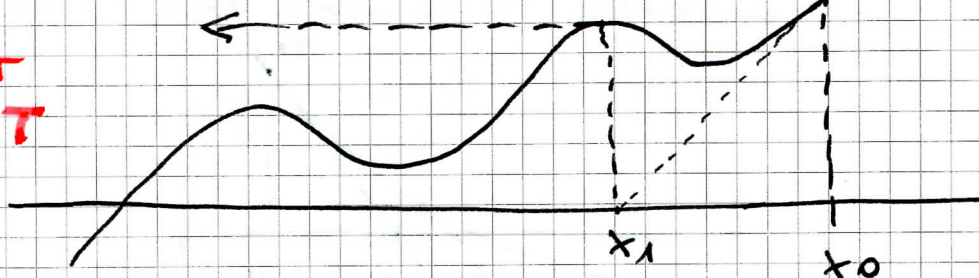
(a)

RUN AWAY

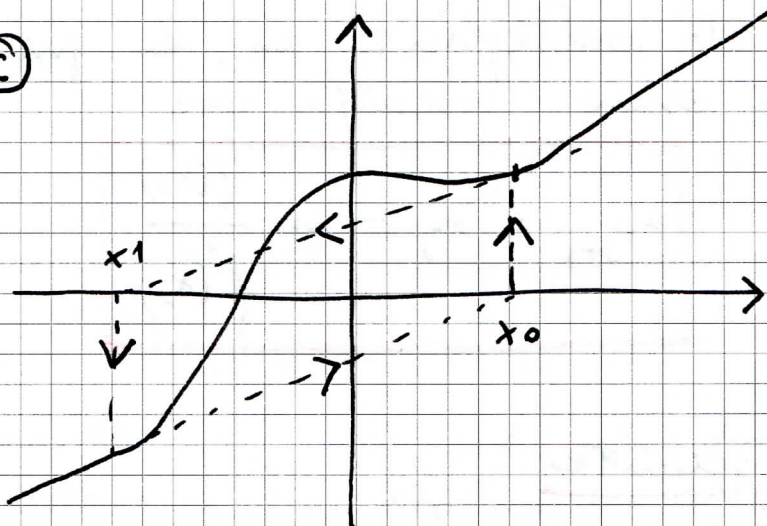


(b)

FLAT SPOT



©



CYCLE

È molto importante conoscere bene l'andamento della funzione nell'intervallo studiato per scegliere con cura il valore di partenza.

Il metodo può essere modificato ➡ per convergere più rapidamente, nel caso la funzione abbia una molteplicità maggiore di uno.

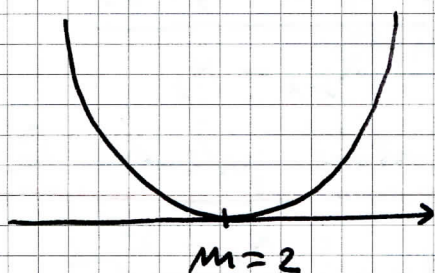
Si dice che x_r è una zero di molteplicità m per $f(x)$ se

$$f^{(h)}(x_r) = 0 \quad 0 \leq h < m$$

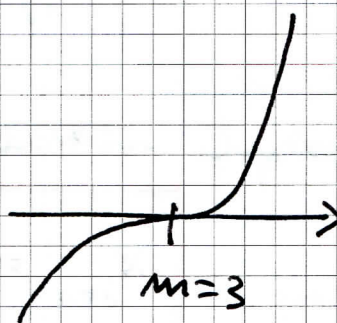
mentre $f^{(m)}(x_r) \neq 0$

[Si annulla la funzione e le derivate fino all'ordine $m-1$ nel punto x_r]

es.



$$f(x) = (x-1)^2$$



$$f(x) = (x-1)^3$$

Per una serie di molteplicità m , la procedura iterativa può essere riscritta come

$$x_{j+1} = x_j - m \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

Metodo della secante

Il metodo parte dall'idea di Newton di approssimare la funzione in un punto con il suo sviluppo in serie fino al I ordine.

Avremo una sequenza $\{x_j\}$ tale che

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

Invece di calcolare la derivata prima, usiamo una sua approssimazione alle differenze finite

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

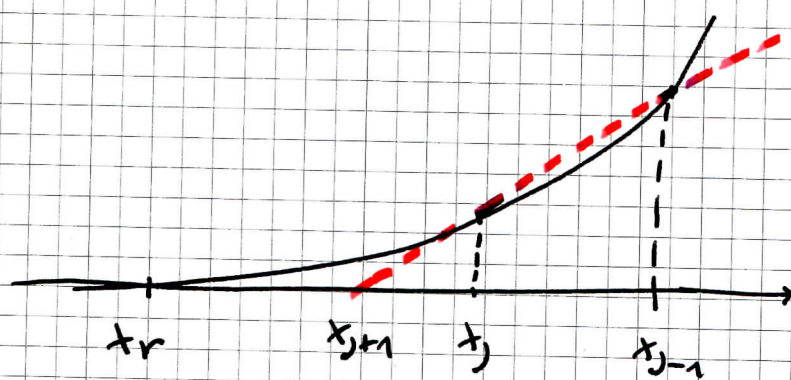
In particolare, se $x = x_j$ e $h = x_{j-1} - x_j$ si può scrivere

$$f'(x_j) \approx \frac{f(x_{j-1}) - f(x_j)}{x_{j-1} - x_j}$$

La formula iterativa di Newton prende la forma

$$x_{j+1} = x_j - f(x_j) \left\{ \frac{x_j - x_{j-1}}{f(x_j) - f(x_{j-1})} \right\}$$

che prende il nome di metodo della secante



Chiaramente x_{j+1} dipende dai due elementi che lo precedono nella sequenza: x_j e x_{j-1} .

Quindi, per iniziare il metodo è necessario fornire x_0 e x_1 .

Il vantaggio del metodo è che, dopo i primi due step, si deve soltanto calcolare il valore della funzione in un punto (e non la sua derivata prima).

Il metodo converge e

$$|e_{j+1}| \leq C |e_j|^\alpha$$

$$\text{con } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$

SOMMARIO

METODO	PRO	CONS
BISEZIONE	affidabile sempre	lento
NEWTON	VELOCE	richiede il calcolo di $f'(x)$ + casi patologici
SECANTE	veloce quasi come NEWTON non richiede il calcolo di $f'(x)$	necessità di un altro metodo per lo startup