

LE 2 6

Interpolazione e estrapolazione di funzioni Integrazione numerica

Supponiamo di conoscere il valore di una funzione $f(x)$ soltanto per un insieme di punti $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$
($x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1}$)

ma di non avere una formula analitica per $f(x)$
che ci permetta di valutare il valore che assume
per un punto arbitrario.

Task: stimare $f(x)$ per un arbitrario valore x .

Ci sono due possibilità:

1) x si trova all'interno del dominio

$$x_0 < x < x_{N-1}$$

↳ INTERPOLAZIONE

2) x si trova all'esterno dell'intervallo,

$$x < x_0 \text{ or } x > x_{N-1}$$

↳ ESTRAPOLAZIONE

Entrambi gli schemi di interpolazione e estrapolazione devono modellare la funzione con qualche forma funzionale plausibile.

Le forme più utilizzate sono:

- polinomi;
- funzioni razionali (quozienti di polinomi);
- funzioni trigonometriche (interpolazione trigonometrica e metodi di Fourier)

Interpolazione polinomiale

Dati N punti è possibile interpolarli con un polinomio di grado $N-1$

2 punti $\rightarrow$ 1 retta $y = a + bx$

3 punti $\rightarrow$ quadratica $y = a + bx + cx^2$

La formula del polinomio che passa per $N+1$ punti è data dalla formula di Lagrange (e il polinomio si chiama polinomio di Lagrange)

Dati $n+1$ punti $(x_j, y_j) \quad j=0, 1, \dots, n$

il polinomio interpolatore di grado n è

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x)$$

con

$$L_j(x) = \prod_{\substack{v=0 \\ v \neq j}}^n \frac{x - x_v}{x_j - x_v}$$

Esempio $n=1$ 2 punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1)

$$P_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{x(y_0 - y_1) - y_0 x_1 + y_1 x_0}{x_0 - x_1} \end{aligned}$$

aggiungo e tolgo $u_1 y_1$

$$P_1(u) = u \frac{y_0 - y_1}{u_0 - u_1} - \frac{\overbrace{y_0 u_1} + \overbrace{u_1 y_1} - \overbrace{y_1 u_0} - \overbrace{u_1 y_1}}{u_0 - u_1}$$

$$P_1(u) = u \frac{y_0 - y_1}{u_0 - u_1} - u_1 \frac{y_0 - y_1}{u_0 - u_1} + y_1 \frac{u_0 - u_1}{u_0 - u_1}$$

$$P_1(u) = (u - u_1) \frac{y_0 - y_1}{u_0 - u_1} + y_1$$

Nel caso di un polinomio per 3 punti

$$P_2(u) = y_0 L_0(u) + y_1 L_1(u) + y_2 L_2(u)$$

$$L_0(u) = \frac{u - u_1}{u_0 - u_1} \cdot \frac{u - u_2}{u_0 - u_2}$$

$$L_1(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} \cdot \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}$$

$$L_2(u) = \frac{u - u_0}{u_2 - u_0} \cdot \frac{u - u_1}{u_2 - u_1}$$

$$\begin{aligned} \text{con } y_0 &= f(u_0) \\ y_1 &= f(u_1) \\ y_2 &= f(u_2) \end{aligned}$$

Per calcolare, numericamente, il valore che un polinomio di Lagrange assume in un punto u si utilizza l'algoritmo di Neville

- sono dati $n+1$ punti (u_j, y_j) $j=0, 1, \dots, n$
- poniamo $P(u_j) = y_j \quad \forall j$
- si costruisce una struttura triangolare e un polinomio $P_{ij}(u)$ che è dato dall'interpolazione lineare dei punti u_i e u_j

es. $m = 4$

$$P_{0,0}(u) = y_0$$

$$P_{0,1}(u)$$

$$P_{1,1}(u) = y_1$$

$$P_{0,2}(u)$$

$$P_{1,2}(u)$$

$$P_{0,3}(u)$$

$$P_{2,2}(u) = y_2$$

$$P_{1,3}(u)$$

$$P_{0,4}(u)$$

$$P_{2,3}(u)$$

$$P_{1,4}(u)$$

$$P_{3,3}(u) = y_3$$

$$P_{2,4}(u)$$

$$P_{3,4}(u)$$

$$P_{4,4}(u) = y_4$$

È IL
VALORE DEL
POLINOMIO NEL
PUNTO u

con
$$P_{i,j}(u) = \frac{(u_j - u) P_{i,j-1}(u) + (u - u_i) P_{i+1,j}(u)}{u_j - u_i}$$

CALCOLO DELLE FUNZIONI.

Supponiamo di avere scritto una funzione tramite
un polinomio di grado m e di conoscere quindi
i coefficienti $c[j]$, con $j = 0, 1, \dots, m-1$

Il polinomio è del tipo

$$y = c[0] + c[1] \cdot x + c[2] \cdot x^2 + \dots + c[m-1] x^{m-1}$$

Dal punto di vista computazionale non è corretto calcolare il polinomio come

$$y = c[0] + c[1] \cdot x + c[2] \cdot x \cdot x + c[3] \cdot x \cdot x \cdot x + \dots$$

oppure come

$$y = c[0] + c[1] \cdot x + c[2] \cdot \text{pow}(x, 2.0) + \\ + c[3] \cdot \text{pow}(x, 3.0) + \dots$$

la maniera corretta è scrivere

$$y = c[0] + x \cdot (c[1] + x \cdot (c[2] + x \cdot (c[3] + \dots)))$$

e il codice che scriveremo sarà

```
y = c[n-1];  
for (j = n-2; j >= 0; j--) {  
    p = p * x + c[j];  
}
```

oppure

```
j = n-1  
y = c[j]  
while (j > 0) {  
    p = p * x + c[j--];  
}
```

Integrazione numerica.

Coincide con il calcolo di integrali definiti.

Nel caso degli integrali di Riemann di funzioni di una variabile reale $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$I = \int_a^b f(u) du$$

Il problema è equivalente a risolvere l'equazione differenziale

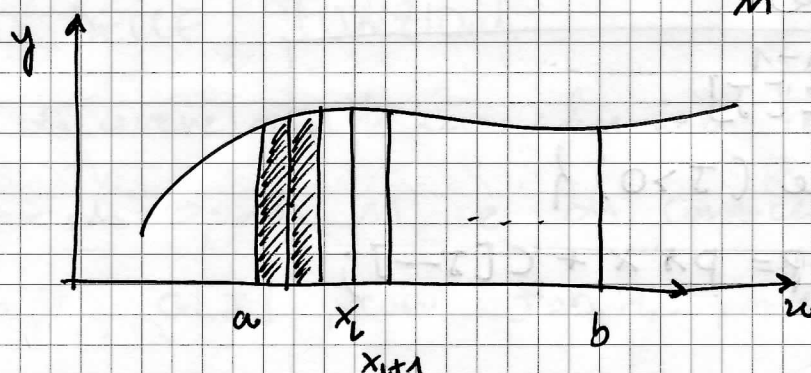
$$\frac{dy}{du} = f(u)$$

con condizioni al contorno $y(a) = 0$ e $y(b) = I$

L'integrale $\int_a^b f(u) du$ rappresenta un'area

$$\int_a^b f(u) du = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^m f(u_h) \cdot h$$

$$\text{con } h = \frac{b-a}{m}$$



Il calcolo dell'integrale alla Riemann è un processo di somme

$$I = \int_a^b f(u) du = \sum_{k=1}^m w_k \cdot f(u_k) + \sigma_t$$

con

$$w_i \equiv \text{pen}$$

$x_i \equiv$ punti campionati nel dominio

$\sigma_T \equiv$ errore di troncamento dovuto alla somma finita di termini

Pensiamo ora di dividere l'intervallo di partenza $[a, b]$ in sette intervalli equispaziati

$$u_0 = a, \quad u_1 = a+h, \quad u_2 = a+2h, \quad \dots, \quad u_{n-1} = b-h, \quad u_n = b$$

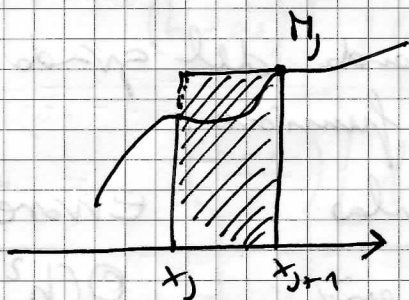
$$\int_a^b f(u) du = \int_{u_0}^{u_1} f(u) du + \int_{u_1}^{u_2} f(u) du + \dots + \int_{u_{n-1}}^{u_n} f(u) du$$

L'integrale nell'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ può essere approssimato come

SOMME SUPERIORI

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(u) du \leq M_j (x_{j+1} - x_j)$$

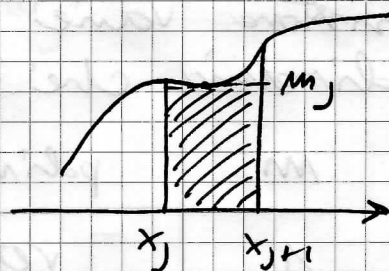
$$M_j = \sup \{ f(u) : u \in [x_j, x_{j+1}] \}$$



SOMME INFERIORI

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(u) du \geq m_j (x_{j+1} - x_j)$$

$$m_j = \inf \{ f(u) : u \in [x_j, x_{j+1}] \}$$



Si può quindi scrivere

$$\sum_{j=0}^{n-1} m_j (x_{j+1} - x_j) \leq \int_a^b f(u) du \leq \sum_{j=0}^{n-1} M_j (x_{j+1} - x_j)$$

Nel caso in cui $n \rightarrow \infty$ le due somme coincidono.

La procedura descritta è scomoda da attuare numericamente in quanto è necessario studiare l'andamento della funzione e calcolare MIN e MAX all'interno dei vari sottointervalli.

Il caso si semplifica enormemente se avessimo a che fare con funzioni monotone (crescenti o decrescenti)

Se pertanto $f(x)$ è monotona

CRESCENTE

$$m_j \equiv f(x_j)$$

$$M_j \equiv f(x_{j+1})$$

DECRESCENTE

$$m_j \equiv f(x_{j+1})$$

$$M_j \equiv f(x_j)$$

Normalmente per il calcolo di integrali di funzioni si ricorre all'approssimazione polinomiale della funzione all'interno dell'intervallo.

Esistono varie formule a seconda del grado del polinomio che approssima la funzione.

n	polinomio	Formule	Errore
1	retta	Trapezio	$O(h^2)$
2	parabola	Simpson $\frac{1}{3}$	$O(h^4)$
3	cubica	Simpson $\frac{3}{8}$	$O(h^4)$

Le formule indicate sono le

Formule di Newton-Cotes

Studiamo il caso $m=1 \Rightarrow$ Regola del Trapezio.

Tecnica adeguata: si approssima la funzione con una retta nell'intervallo di integrazione

$$P_1(u) = f(a) + (u-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$I = \int_a^b f(u) du \approx \int_a^b P_1(u) du = \int_a^b f(a) du + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \int_a^b (u-a) du$$

$$= f(a) \times \int_a^b 1 du + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left[\frac{u^2}{2} \Big|_a^b - a \times \int_a^b 1 du \right]$$

$$= f(a) (b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left[\frac{(b+a)(b-a)}{2} - a(b-a) \right]$$

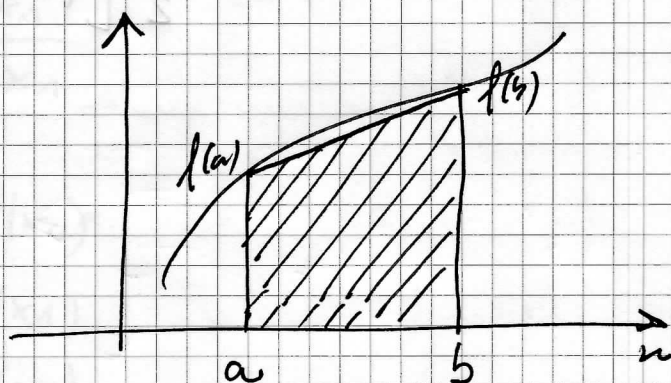
$$= f(a) (b-a) + (f(b)-f(a)) \left[\frac{b+a}{2} - a \right]$$

$$= f(a) (b-a) + [f(b)-f(a)] \frac{b-a}{2}$$

$$= (b-a) \left[f(a) + \frac{1}{2} f(b) - \frac{1}{2} f(a) \right]$$

$$\int_a^b f(u) du = \left(\frac{b-a}{2} \right) [f(a) + f(b)]$$

Il significato geometrico
è quello dell'area di un
trapezio



L'errore che si commette è dell'ordine $O(h^2)$

Questo si può dedurre tenendo conto che abbiamo usato una approssimazione lineare della funzione.

Se consideriamo lo sviluppo di serie di Taylor nell'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$

$$f(u) \approx f(x_j) + (x-x_j) f'(x_j) + \frac{(x-x_j)^2}{2} f''(x_j)$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(u) du = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x_j) dx + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x-x_j) dx + O(h^2)$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(u) du = \frac{h}{2} [f(x_{j+1}) + f(x_j)] + O(h^2)$$

con $h \equiv x_{j+1} - x_j$

ESEMPIO

Calcolare

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

$$T = \frac{2}{2} [f(2) + f(0)] = e^{-4} + 1 = 1.0183$$

Formula generalizzata dei Trapezii.

Suddividiamo l'intervallo di partenza in n sottointervalli di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(u) du = \int_a^{a+h} f(u) du + \int_{a+h}^{a+2h} f(u) du + \dots + \int_{b-h}^b f(u) du$$

$$= \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] + \frac{h}{2} [f(a+2h) + f(a+h)] + \dots + \frac{h}{2} [f(b) + f(b-h)]$$

$$T = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{l=1}^{n-1} f(a+lh) + f(b) \right]$$

Consideriamo ora l'approssimazione della funzione da integrare con un polinomio di grado $m=2$

$$P_2(u) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

dove

$$\begin{aligned} y_0 &\equiv f_0 = f(x_0) \\ y_1 &\equiv f_1 = f(x_1) \\ y_2 &\equiv f_2 = f(x_2) \end{aligned}$$

Calcolare l'integrale tra x_0 e x_0+2h

$$\begin{aligned} S_{1/3} &= \int_{x_0}^{x_0+2h} P_2(u) du \\ &= \int_{x_0}^{x_0+2h} f_0 \frac{(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{(-h)(-2h)} du + \\ &\quad \int_{x_0}^{x_0+2h} f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_0-2h)}{h(-h)} du + \\ &\quad \int_{x_0}^{x_0+2h} f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2h(h)} du \\ &= \frac{f_0}{2h^2} \int_{x_0}^{x_0+2h} (x-x_0-h)(x-x_0-2h) du + \\ &\quad - \frac{f_1}{h^2} \int_{x_0}^{x_0+2h} (x-x_0)(x-x_0-2h) du + \\ &\quad + \frac{f_2}{2h^2} \int_{x_0}^{x_0+2h} (x-x_0)(x-x_0-h) du \end{aligned}$$

$$x_1 \equiv x_0+h$$

$$x_2 \equiv x_0+2h$$

Operiamo con cambiamento di variabile $z \equiv x-x_0$
 $dz = dx$

$$\begin{aligned}
S_{1/3} &= \frac{f_0}{2h^2} \int_0^{2h} (z-h)(z-2h) dz - \frac{f_1}{h^2} \int_0^{2h} z(z-2h) dz + \frac{f_2}{2h^2} \int_0^{2h} z(z-h) dz \\
&= \frac{f_0}{2h^2} \int_0^{2h} (z^2 - 3hz + 2h^2) dz - \frac{f_1}{h^2} \int_0^{2h} (z^2 - 2hz) dz + \frac{f_2}{2h^2} \int_0^{2h} (z^2 - hz) dz \\
&= \frac{f_0}{2h^2} \left(\frac{z^3}{3} - 3h\frac{z^2}{2} + 2h^2z \right) \Big|_0^{2h} - \frac{f_1}{h^2} \left(\frac{z^3}{3} - 2h\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{2h} + \frac{f_2}{2h^2} \left(\frac{z^3}{3} - h\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{2h} \\
&= \frac{f_0}{2h^2} \left[\frac{8}{3}h^3 - 6h^3 + 4h^3 \right] - \frac{f_1}{h^2} \left[\frac{8}{3}h^3 - 4h^3 \right] + \frac{f_2}{2h^2} \left[\frac{8}{3}h^3 - 2h^3 \right] \\
&= \frac{f_0 h}{3} + f_1 h \frac{4}{3} + f_2 h \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$S_{1/3} = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2]$$

FORMULA DI
SIMPSON $1/3$

ESEMPIO

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
S_{1/3} &= \frac{1}{3} [e^0 + 4e^{-1} + e^{-4}] = \\
&= 0.82994
\end{aligned}$$

Se approssimiamo la funzione da integrare con un polinomio di III grado ($m=3$) si ricaverrebbe la formula Simpson $3/8$

FORMULA DI
SIMPSON $3/8$

$$S_{3/8} = \frac{3}{8} h [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$