LEZ

Risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Spesso capita, risolvendo problemi di fisica, di dover risolvere un sistema di n equazioni lineari in n incognite del tipo

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

È possibile riscrivere il problema in forma matriciale

$$A \cdot x = B$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

In generale l'equazione algebrica $Ax = B$ può avere o non avere delle soluzioni ed in caso affermativo possono non essere uniche.
Il metodo dell'eliminazione di Gauss è il metodo standard utilizzato per risolvere questi sistemi usando un calcolatore. Nel caso il sistema non abbia soluzioni, si utilizzano altri approcci (per esempio il metodo dei minimi quadrati)

Dal punto di vista matematico, la soluzione al problema
$$Ax = B$$
è semplicemente $x = A^{-1} b$
dove A^{-1} è la matrice inversa, tale che $A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}$
[$\mathbb{1}$ è la matrice unitaria]

Nella maggior parte dei casi pratici è preferibile risolvere il sistema direttamente piuttosto che calcolare la matrice inversa A^{-1}

Il metodo di eliminazione gaussiana, che ~~discut~~ affronteremo in questa lezione consiste nel trasformare il sistema lineare in una matrice upper triangolare.
L'idea di base è aggiungere o sottrarre combinazioni lineari delle equazioni del sistema fino a quando ogni equazione conterrà soltanto una incognita, fornendo in tal modo la soluzione cercata.

Per introdurre il metodo consideriamo un sistema lineare con 4 equazioni e 4 incognite
$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 26 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 = -19 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 = -34 \end{cases}$$
In forma matriciale si può riscrivere
$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Il **I STEP** consiste nel partire dalla I equazione ed eliminare il termine x_1 dalle altre 3 equazioni:

- sottraiamo 2 volte la I dalla II;
- sottraiamo $\frac{1}{2}$ volte la I dalla III;
- sottraiamo -1 volta la I dalla IV.

Il sistema diventa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\ \underbrace{0 \quad\; 2 \quad\; 3 \quad\; -14}_{\text{matrice } A} & & & & -18 \end{array}\right)$$

il sistema è scritto in forma compatta

matrice colonna dei termini noti B

NOTA: la I equazione non è stata alterata dal processo e prende il nome di eq. di PIVOTING

Col il **II STEP** si tiene fissa la II equazione e si cerca di eliminare il termine x_2 dalla III e dalla IV equazione:

- sottraiamo 3 volte l'eq. II dalla III
- sottraiamo $-\frac{1}{2}$ volte l'eq. II dalla IV

Otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{array}\right)$$

~~Ko~~ Il **III STEP** consiste nel

- sottrarre 2 volte l'eq. III dalla eq. IV

Il risultato finale è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

La matrice A è stata ridotta in forma UPPER-TRIANGOLARE (tutti i termini sotto la diagonale principale sono nulli)

Il processo di riduzione del sistema nella forma trovata prende il nome di **FORWARD ELIMINATION**

La seconda parte dell'algoritmo, chiamata **BACK SUBSTITUTION**, consiste nel ricavare le soluzioni a partire dall'ultima equazione del sistema

$$-3x_4 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 1$$

sostituendo il valore di x_4 nell'eq. III si ricava

$$2x_3 - 5\cdot 1 = -9$$

$$x_3 = \frac{-4}{2} = -2$$

allo stesso modo si procede per ricavare le soluzioni x_2 e x_1 ottenendo

$$x_2 = 1 \quad e \quad x_1 = 3$$

Scriviamo infine l'algoritmo che ci permette di ricavare le soluzioni nel caso di un generico sistema di n equazioni lineari in n incognite.

Si parte dalla I equazione (chiamata anche **PIVOT EQUATION** determinando i moltiplicatori per eliminare tutti i termini dell'elemento x_1 dalle altre equazioni.

Il coefficiente a_{11} si chiama **PIVOT ELEMENT**

Fissato a_{11}, per le rimanenti $n-1$ equazioni si calcola

$$\begin{cases} a_{lj} \leftarrow a_{lj} - \left(\dfrac{a_{l1}}{a_{11}}\right) a_{1j} \\ b_l \leftarrow b_l - \left(\dfrac{a_{l1}}{a_{11}}\right) b_1 \end{cases}$$

dove l corre nelle altre equazioni $2 \leq l \leq n$ (indice di riga) mentre j indica la colonna corrispondente ($1 \leq j \leq n$).

I termini $\left(\dfrac{a_{l1}}{a_{11}}\right)$ sono chiamati moltiplicatori

Il nuovo sistema avrà la forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Si procede ora tenendo ferma la II equazione ed eliminando tutti i termini di x_2 dalle equazioni successive

$$3 \leq l \leq n$$

$$\begin{cases} a_{lj} \leftarrow a_{lj} - \left(\dfrac{a_{l2}}{a_{22}}\right) a_{2j} \quad 2 \leq j \leq n \\ b_l \leftarrow b_l - \left(\dfrac{a_{l2}}{a_{22}}\right) b_2 \end{cases}$$

Si procede in questo modo fino a quando il sistema non sarà posto in forma UPPER TRIANGULAR.

La prima parte dell'algoritmo prende il nome di

FORWARD ELIMINATION.

Passiamo infine al calcolo delle soluzioni del sistema:

BACK SUBSTITUTION.

Si parte dall'ultima equazione:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

e poi si ripercorrono le altre equazioni all'indietro calcolando

$$x_l = \frac{1}{a_{ll}}\left(b_l - \sum_{j=l+1}^{n} a_{lj}\, x_j\right)$$

con $l = n-1, n-2, \dots, 1$

Consideriamo ora i **RESIDUI** e gli **ERRORI** dovuti alla soluzione numerica.

Supponiamo che il sistema lineare $Ax = b$ abbia come soluzione ~~esatta~~ il vettore x e come soluzione ~~non~~ numerica il vettore $\tilde{x}$

Si definisce

VETTORE degli ERRORI $e = \tilde{x} - x$

VETORE dei RESIDUI $r = A\tilde{x} - b$

Una importante relazione tra i vettori degli errori e dei residui è

$$Ae = r$$

Consideriamo ora un esempio che non può essere risolto con l'algoritmo di eliminazione di Gauss.
Sia dato il sistema

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

L'algoritmo fallisce perché $a_{11} = 0$.
Modifichiamo leggermente il sistema supponendo che nella prima equazione il coefficiente dell'incognita x_1 sia un numero molto piccolo ϵ:

$$\begin{cases} \epsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Applicando l'eliminazione di Gauss-Jordan si riduce a

$$\begin{cases} \epsilon x_1 + x_2 = 1 \\ \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) x_2 = 2 - \frac{1}{\epsilon} \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$x_2 = \frac{2 - \frac{1}{\epsilon}}{1 - \frac{1}{\epsilon}} \simeq 1 \qquad x_1 = \frac{1 - x_2}{\epsilon} \sim 0$$

Mentre la soluzione analitica è

$$x_2 = \frac{1 - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \sim 1 \qquad x_1 = \frac{1}{1 - \epsilon} \sim 1$$

In realtà l'algoritmo avrebbe funzionato correttamente se avessimo scambiato le due righe

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{matrix}}$$ soluzione esatta

Anche il secondo sistema avrebbe potuto essere risolto invertendo le due righe

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \epsilon x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo con l'algoritmo di eliminazione di Gauss avremo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) x_2 = \frac{1}{\epsilon} - 2 \end{cases}$$

con soluzioni

$$x_2 = \frac{\frac{1}{\epsilon} - 2}{\frac{1}{\epsilon} - 1} = \frac{1 - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \simeq 1$$

$$x_1 = 2 - x_2 \simeq 1$$

che è la soluzione corretta.

Una modifica al metodo di eliminazione di Gauss Jordan consiste nello scambiare tra di loro le righe del sistema in modo da poter risolvere correttamente il sistema.

La tecnica prende il nome di **PARTIAL PIVOTING**

Nella procedura di eliminazione gaussiana con partial pivoting l'equazione di PIVOTING è quella con il valore massimo dei coefficienti (in valore assoluto) tra quelli della stessa colonna

Vediamo la soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -34 \\ 16 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Ricerchiamo, in ogni riga il coefficiente con valore assoluto più grande e costruiamo un vettore di scala con componenti

$$S_l = \max |a_{lj}|$$

$l \equiv$ indice riga $\quad$ $j \equiv$ indice della colonna

$$1 \leq l, j \leq n$$

Nel nostro sistema abbiamo

$$S = (13, 18, 6, 12)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -13 & 9 & 3 & -19 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -34 \\ 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \end{array}\right]$$

A questo punto partiamo dalla prima colonna e calcoliamo i rapporti $\frac{|a_{l,1}|}{S_l}$

$$\frac{|a_{l,1}|}{S_l} = \left\{ \frac{3}{13}, \frac{6}{18}, \frac{6}{6}, \frac{12}{12} \right\} = \{0{,}23,\ 0.33,\ 1,\ 1\}$$

sceglieremo quindi la III equazione (con rapporto $\frac{6}{6} = 1$)

Costruiamo un vettore indice che tiene conto dell'ordine con cui vengono considerate le colonne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -13 & 9 & 3 & -19 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -34 \\ \boxed{6 \quad -2 \quad 2 \quad 4} & & & & \boxed{16} \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \end{array}\right)$$

I eq. PIVOTALE

Nel vettore indice scambiamo la prima riga con la terza

$$\text{index} = \{3, 2, 1, 4\}$$

scambiate dopo il I passaggio

applicando ora il metodo di eliminazione di Gauss eliminiamo il primo coefficiente delle eq. 2, 1 e 4 ottenendo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -18 \\ 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

II eq. PIVOTALE

passiamo ora alla seconda colonna calcolando qual'è la migliore riga da scegliere

$$\frac{|a_{\ell,2}|}{s_\ell} = \left\{ \frac{|a_{2,2}|}{s_2}, \frac{|a_{1,2}|}{s_3}, \frac{|a_{4,2}|}{s_4} \right\}$$

dove ho considerato come indice il secondo, terzo e quarto elemento del vettore index

$$\text{index}(2) = 2$$
$$\text{index}(3) = 1$$
$$\text{index}(4) = 4$$

$$\frac{|a_{\ell,2}|}{s_\ell} = \left\{ \frac{2}{18}, \frac{12}{13}, \frac{4}{12} \right\} = \{0.11, 0.92, 0.33\}$$

prossima equazione PIVOTALE

il nuovo vettore indice è

$$\text{index} = \{3, 1, 2, 4\}$$

scambiate dopo II passaggio

la prima equazione è sottratta dalla seconda e dalla quarta

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\ 0 & 0 & 13/3 & -83/6 & -45/2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & -2/3 & 5/3 & 3 \end{array}\right)$$

III eq. PIVOTALE

rimangono infine le righe II e IV.
Calcoliamo i rapporti

$$\left|\frac{a_{\ell,3}}{S_\ell}\right| = \left\{\frac{13/3}{18}, \frac{2/3}{12}\right\} = \{0.24, 0.06\}$$

il nuovo indice è

$$index = \{3, 1, 2, 4\}$$

la parte di forward elimination è quindi completata ed il sistema è stato ridotto a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\ 0 & 0 & 13/3 & -83/6 & -45/2 \\ 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{13} & -6/13 \end{array}\right)$$

Per la fase di calcolo delle soluzioni (BACK SUBSTITUTION) procediamo dalle equazioni con l'ordine contrario rispetto a quello seguito per la FORWARD ELIMINATION.

$$x_4 = \frac{1}{-\frac{6}{13}}\left(-\frac{6}{13}\right) = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{\frac{13}{3}}\left[-\frac{45}{2} + \frac{83}{6}\cdot 1\right] = -2$$

e $\quad x_2 = \dots = 1 \quad , \quad x_1 = \dots = 3$

LEZ

Risolvere grandi sistemi di equazioni lineari può essere un processo costoso dal punto di vista computazionale.

Confrontiamo i due metodi introdotti fino ad ora.
Per calcolare il costo computazionale ~~analisse~~ considereremo soltanto le moltiplicazioni e le divisioni.

Procedura **GAUSS CON PARTIAL PIVOTING**

1) la scelta dell'elemento pivotale richiede il calcolo di n ~~rapporti~~ divisioni
2) per le righe $l_2, l_3, \dots l_n$ calcoliamo il moltiplicatore e poi si sottrae dalla riga l_i il moltiplicatore per la riga l_1

   Il termine che in ogni caso è zero non viene calcolato esplicitamente $\Rightarrow$ l'eliminazione richiede $n-1$ moltiplicazioni per riga.
   Ci sono $n-1$ righe da processare quindi $n(n-1)$ operazioni

   In totale ci saranno n^2 operazioni in totale

   Per gli step successivi avremo $(n-1)^2$, poi $(n-2)^2$ operazioni e così via

   Quindi circa

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 4 + 3 + 2^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$
$$\sim \frac{n^3}{3}$$

3) per la procedura di calcolo delle soluzioni avremo

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n}{2}(n-1)$$

e per la back substitution

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

Quindi:

data un sistema di n equazioni lineari $Ax = b$, la fase di forward elimination dell'eliminazione Gaussiana con PIVOTING PARZIALE ~~...~~ coinvolge $\frac{n^3}{3}$ operazioni (moltiplic. o divisioni), mentre la fase di back substitution richiede n^2 operazioni tra moltiplic. e divisioni.

Consideriamo ora i sistemi tridiagonali

Spesso capita che la matrice A abbia una struttura del tipo

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & 0 & & \bigcirc & \\ 0 & a_2 & d_3 & c_3 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \bigcirc & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & 0 & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

dove gli unici elementi diversi da zero si trovano sulla diagonale principale (d_ℓ, $1 \le \ell \le n$), sulla diagonale sopra quella principale (c_ℓ, $1 \le \ell \le n-1$) e sulla diagonale sotto quella principale (a_ℓ, $1 \le \ell \le n-1$)

Una matrice tri-diagonale è caratterizzata dalla condizione

$$a_{ij} = 0 \quad \text{con} \quad |i-j| \geq 2$$

Possiamo subito notare, che dal punto di vista dello 'storage dati', una matrice diagonale richiede n locazioni di memoria, mentre una tri-diagonale ha bisogno di

$$n + 2(n-1) = 3n - 2$$ locazioni di memoria.

L'algoritmo di eliminazione di Gauss-Jordan è molto efficiente se il PIVOTING non è necessario.

Verifichiamo quali operazioni vengono eseguite:

FORWARD ELIMINATION

- si sottrae $\frac{a_1}{d_1}$ moltiplicato riga 1 dalla riga 2 (soltanto d_2 e b_2 sono alterati!)

$$\begin{cases} d_2 = d_2 - \left(\frac{a_1}{d_1}\right) c_1 \\ b_2 = b_2 - \left(\frac{a_1}{d_1}\right) b_1 \end{cases}$$

- si passa alle righe successive. In generale

con $2 \le l \le n$

$$\begin{cases} d_l = d_l - \left(\frac{a_{l-1}}{d_{l-1}}\right) c_{l-1} \\ b_l = b_l - \left(\frac{a_{l-1}}{d_{l-1}}\right) b_{l-1} \end{cases}$$

Alla fine della procedura, la matrice avrà la forma

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} d_1 & c_1 & & & & & b_1 \\ 0 & d_2 & c_2 & & & & b_2 \\ & 0 & d_3 & c_3 & & & b_3 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & d_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & 0 & d_n & b_n \end{array}\right)$$

BACK SUBSTITUTION

in generale

- $x_n = \frac{b_n}{d_n}$
- $x_{n-1} = \frac{1}{d_{n-1}} \left(b_{n-1} - c_{n-1} * x_n \right)$

$\vdots$

- $x_l = \frac{1}{d_l} \left(b_l - c_l \cdot x_{l+1} \right)$

È possibile dimostrare che per una matrice diagonale dominante, l'operazione di PARTIAL PIVOTING non è necessaria in quanto non si incontreranno divisioni per zero durante la procedura di eliminazione di Gauss-Jordan.

Una matrice è detta diagonale dominante se il valore assoluto dei termini sulla diagonale principale è più grande della somma dei due coefficienti vicini alla diagonale sulla stessa riga.

$$|a_{ee}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^{n} |a_{ej}|$$

nel nostro caso, essendo una matrice tri-diagonale avviene che

$$|d_e| > |a_{e-1}| + |c_e|$$