EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE CON PIÙ CONDIZIONI AL CONTORNO (Boundary-Value problems)

Consideriamo i problemi con equazioni differenziali ordinarie per le quali vi siano più condizioni al contorno.

Esempio. Si risolva l'eq. differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

con i vincoli

$$x(0) = 1 \quad \text{e} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

Per determinare una soluzione di una eq. diff. ordinaria avevamo specificato il valore di x e di $\frac{dx}{dt}$ ad un punto iniziale (cond. di Cauchy)

Nell'esempio precedente, invece, abbiamo due punti nella forma $(t, x(t))$ per i quali deve passare la soluzione, cioè attraverso $(0,1)$ e $(\frac{\pi}{2},-3)$

Cercando una soluzione del tipo

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

e applicando le due condizioni al contorno si determinano i coefficienti

$$x(0)=1 \rightarrow 1 = c_2$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3 \rightarrow -3 = c_1$$

Desideriamo ora sviluppare un metodo numerico che permetta di determinare la soluzione generale dell'eq. differenziale. Cioè di risolvere

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right) \\ x(a) = \alpha \quad \text{e} \quad x(b) = \beta \end{cases}$$

Una procedura possibile è la seguente:

- fissare con un 'guess' $\left.\frac{dx}{dt}\right|_a$ ed evolvere numericamente la soluzione
- si confronta quindi la soluzione ottenuta $\bar{x}(t)$ nel punto $t=b$
- se $\bar{x}(b) = \beta$ abbiamo la soluzione corretta
- altrimenti bisognerà ritornare all'ipotesi di partenza sulla derivata prima $\left.\frac{dx}{dt}\right|_a$ e ripetere l'evoluzione fino a quando $\bar{x}(b)$ ~~sarà~~ passerà per β

La procedura introdotta prende il nome di

$\boxed{\textbf{SHOOTING METHOD}}$

Si può notare che il valore finale $\bar{x}(b)$ della soluzione dipende dal 'guess' introdotto in $\left.\frac{dx}{dt}\right|_a$. Tutte le altre condizioni sono fissate, cioè l'eq. differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,\frac{dx}{dt})$ e la condizione iniziale $x(a) = \alpha$ non cambiano.

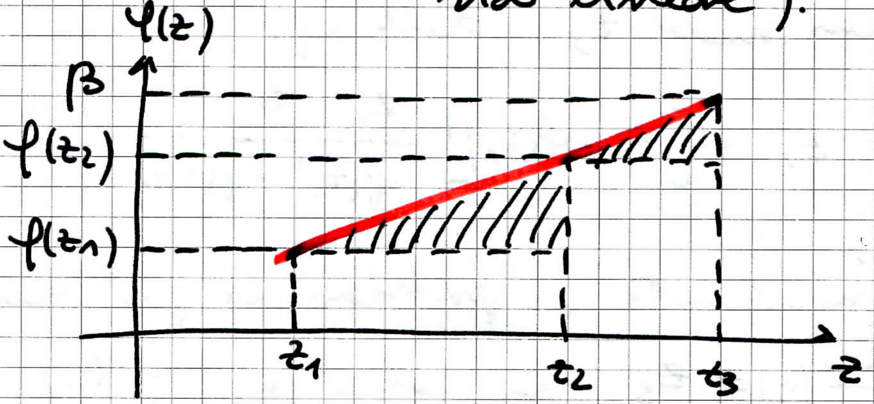
È pertanto possibile parametrizzare la condizione mancante $\left.\frac{dx}{dt}\right|_a = z$, con z quantità reale.

Il problema iniziale può essere riscritto come

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x(t), \dfrac{dx(t)}{dt}\right) & \text{nell'intervallo } [a,b] \\ x(a) = \alpha \qquad \dfrac{dx}{dt}(a) = z \end{cases}$$

Se poniamo $\varphi(z) = x(b)$, lo scopo è modificare z fino a quando $\varphi(z) = \beta$

Una possibilità è, date due condizioni iniziali z_1 e z_2, calcolare una interpolazione lineare tra $\varphi(z_1)$ e $\varphi(z_2)$ in modo da trovare lo zero di $\varphi(z) - \beta$ (sotto l'approssimazione che $\varphi(z)$ sia lineare).



Considerando in figura i due triangoli simili è possibile scrivere

$$\frac{z_3 - z_2}{\beta - \varphi(z_2)} = \frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}$$

dalla quale si ottiene

$$z_3 = z_2 + \left[\beta - \varphi(z_2)\right] \frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}$$

Se ripetiamo il processo in maniera iterativa, si genera la sequenza

$$z_{n+1} = z_n + \left[\beta - \varphi(z_n)\right] \frac{z_n - z_{n-1}}{\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1})}$$

Algoritmo:

1) risolvere il problema iniziale

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = f\left(t, u, \dfrac{dx}{dt}\right) \\ u(a) = \alpha \qquad \dfrac{du}{dt}(a) = z \end{cases}$$

evolvendo da $t = a \longrightarrow t = b$ indicando la soluzione in b con $\varphi(z)$

2) risolvere il problema per due valori differenti, chiamati z_1 e z_2, calcolando $\varphi(z_1)$ e $\varphi(z_2)$

3) calcolare un nuovo z_3 dall'eq.

$$z_3 = z_2 + \left[\beta - \varphi(z_2)\right] \frac{z_2 - z_1}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)}$$

4) risolvere nuovamente il problema di partenza con $\dfrac{du}{dt}(a) = z_3$ e calcolare $\varphi(z_3)$

5) con la stessa procedura, iterare per z_4, z_5 e così via, dati da

$$z_{n+1} = z_n + \left[\beta - \varphi(z_n)\right] \frac{z_n - z_{n-1}}{\varphi(z_n) - \varphi(z_{n-1})}$$

6) Durante il processo iterativo, monitorare la quantità

$$\varphi(z_{n+1}) - \beta$$

e fermarsi quando raggiunge un valore piccolo a piacere.

Un metodo alternativo è basato sulla 'discretizzazione' dell'eq. di partenza. L'approccio è chiamato

$\boxed{\text{RELAXATION METHOD}}$

Data l'eq. di partenza con le due condizioni al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right) \\ x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta \end{cases}$$

Si divide l'intervallo $[a, b]$ in un insieme di punti equispaziati $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$

con $t_0 \equiv a$ e $t_n \equiv b$

In generale, $t_j = a + jh$ con $h = \dfrac{b-a}{n}$

e $0 \leq j \leq n$

Usando le approssimazioni alle differenze finite per la derivata prima

$$\frac{dx}{dt} \sim \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} \qquad \text{(derivata centrata)}$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} \sim \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2}$$

Il problema si risolve come

$$1 \leq j \leq n-1 \longrightarrow \begin{cases} x_0 = \alpha \\ \dfrac{1}{h^2}\left[x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}\right] = f\left(t_j; x_j; \dfrac{1}{2h}(x_{j+1} - x_{j-1})\right) \\ x_n = \beta \end{cases}$$

In generale dovremo risolvere un sistema di equazioni non lineari nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

Consideriamo ora il caso in cui l'equazione sia lineare.
In tal caso possiamo scrivere l'eq. differenziale come

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = u(t) + v(t)\,x + w(t)\,\dfrac{dx}{dt} \\ x(a) = \alpha \qquad\qquad x(b) = \beta \end{cases}$$

Riscriviamo l'eq. alle differenze finite discretizzando anche u, v e w:

$$u_j \equiv u(t_j)$$
$$v_j \equiv v(t_j)$$
$$w_j \equiv w(t_j)$$

L'eq. diventa

$$\frac{1}{h^2}\left(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}\right) = u_j + v_j x_j + w_j \frac{x_{j+1} - x_j}{2h}$$

e può essere riscritta come

$$-\left(1 + \frac{h}{2} w_j\right) x_{j-1} + \left(2 + h^2 v_j\right) x_j - \left(1 - \frac{h}{2} w_j\right) x_{j+1} = -h^2 u_j$$

imponendo, per semplicità

$$\begin{cases} a_j \equiv -\left(1 + \frac{h}{2} w_j\right) \\ d_j \equiv 2 + h^2 v_j \\ c_j \equiv -\left(1 - \frac{h}{2} w_j\right) \\ b_j \equiv -h^2 u_j \end{cases}$$

l'eq. diventa

$$a_j x_{j-1} + d_j x_j + c_j x_{j+1} = b_j$$

Imponendo le condizioni quindi

$$x_0 = \alpha \qquad \text{e} \qquad x_n = \beta$$

~~allora~~ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} d_1 x_1 + c_1 x_2 = b_1 - a_1 \alpha \\ a_j x_{j-1} + d_j x_j + c_j x_{j+1} = b_j \qquad (2 \le j \le n-2) \\ a_{n-1} x_{n-2} + d_{n-1} x_{n-1} = b_{n-1} - c_{n-1} \beta \end{cases}$$

che, visto in forma matriciale, è

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & d_2 & c_2 & & 0 & \\ & a_3 & d_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & a_{n-2} & d_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1\alpha \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} - c_{n-1}\beta \end{pmatrix}$$

Il sistema è tri-diagonale e può essere risolto con gli algoritmi introdotti in precedenza (nelle lezioni sui sistemi lineari).

Riprendiamo ora lo $\boxed{\text{SHOOTING METHOD}}$ per il caso lineare

L'eq. da risolvere è

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = u(t) + v(t)\,x + w(t)\dfrac{dx}{dt} \\ x(a) = \alpha \qquad x(b) = \beta \end{cases}$$

Tramite lo $\boxed{\text{SHOOTING METHOD}}$ bisogna risolvere il problema alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = u(t) + v(t)x + w(t)\dfrac{dx}{dt} \\ x(a) = \alpha \qquad \dfrac{dx}{dt}(a) = z \end{cases}$$

ed interpretare il valore $x(b)$ in funzione di z.

Dato che l'eq. di partenza è lineare, anche f è lineare in z. È quindi sufficiente risolvere l'eq. per due valori di z per determinare $f(z)$ in maniera precisa.

Supponiamo di averlo risolto separatamente per $\dfrac{dx}{dt}(a) = z_1$ e $\dfrac{dx}{dt}(a) = z_2$

e di aver determinato le soluzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ la funzione

$$g(t) = \lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t)$$

soddisfa

$$\begin{cases} \dfrac{d^2g}{dt^2} = u + vg + w\dfrac{dg}{dt} \\ g(a) = \alpha \end{cases}$$

Imponendo la condizione $g(b) = \beta$, si ottiene

$$\lambda x_1(b) + (1-\lambda)x_2(b) = \beta$$

e quindi $$\lambda = \frac{\beta - x_2(b)}{x_1(b) - x_2(b)}$$

ALGORITMO SHOOTING METHOD eq. LINEARE

Data l'eq. di partenza, si risolvono i due sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = u(t) + v(t)x + w(t)\dfrac{dx}{dt} \\ x(a) = \alpha \qquad \dfrac{dx}{dt}(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = u(t) + v(t)y + w(t)\dfrac{dy}{dt} \\ y(a) = \alpha \qquad \dfrac{dy}{dt}(a) = 1 \end{cases}$$

La soluzione dell'eq. originaria che soddisfa le due condizioni al contorno è

$$\boxed{\lambda x(t) + (1-\lambda)\, y(t)} \quad \text{con} \quad \boxed{\lambda = \frac{\beta - y(b)}{x(b) - y(b)}}$$