

Soluzione dell'equazione di Laplace con Metodi alle Differenze Finite

Alberto Garfagnini

Università degli studi di Padova

30 Ottobre 2013



Soluzione numerica di equazioni ellittiche

- Le equazioni di tipo ellittico descrivono sistemi in equilibrio o stati stazionari. L'equazione più famosa è quella di Poisson:

$$\nabla^2 u = \rho$$

- Il Laplaciano, discretizzato sulla griglia spazio-temporale, assume la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

Schemi numerici risolutivi

- Metodi di Jacobi

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} \right)$$

- Metodo di Gauss-Seidel

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} \right)$$

- Metodo di Gauss-Seidel con Overrelaxation

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + R \left(\frac{u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)}}{4} - u_{i,j}^{(n)} \right)$$

- con $1 < R < 2$ e $R_{opt} = 2 - c/N$

Es: calcolo della capacità di una linea di trasmissione

- Geometria: conduttore interno, rettangolare di dimensioni $a \times b$ con una guida d'onda esterna di sezione $c \times d$.
- nella regione interna è soddisfatta l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- Definiamo una griglia spaziale:
 $u_{i,j} = u(ih, jh)$.
- Condizioni al contorno: sui punti esterni $u = 0$ V, sul conduttore interno $u = 1$ V.
- Calcolare la carica per unità di lunghezza e la capacità per unità di lunghezza $C = Q/V$.

