Metodi Computazionali della Fisica, A.A. 2013/14
Esercitazione di laboratorio: 13 Novembre 2013

Si vuole risolvere numericamente l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

nel dominio $x \in [0, 1]$ con condizioni iniziali $u(x, 0) = \sin(80\pi x)$ e addizionali condizioni di periodicità agli estremi $u(0, t) = u(1, t)$.

1. Considerare inizialmente l'equazione

   $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

   e trovare la sua soluzione numerica con

   (a) lo schema FTBS (Forward Time Backward Space):

   $$u_j^{n+1} = u_j^n - R\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)$$

   dove $R = c\Delta t/\Delta x$ e le condizioni di stabilità impongono $0 \leq R \leq 1$

   (b) lo schema di Lax-Wendroff:

   $$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{R}{2}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{R^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

   con condizioni di stabilità $|R| < 1$.

   In entrambi i casi considerare $N = 20$ e $\Delta t = 0.01$ e realizzare un grafico della soluzione a $t = 0.0$, $t = 0.1$, $t = 0.2$, $t = 0.4$ e $t = 1.0$

   Ripetere l'esercizio con $N = 100$ e $\Delta t = 0.002$

2. Considerare quindi l'equazione

   $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

   e trovare la sua soluzione numerica utilizzando la stessa discretizzazione spazio-temporale utilizzando lo schema FTFS (Forward Time Forward Space)

   $$u_j^{n+1} = u_j^n - R\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right)$$

   . Lo schema è stabile per $-1 \leq R \leq 0$. Descrivere cosa succede per l'ampiezza e la fase della soluzione numerica cofrontandola con la soluzione analitica (a tempi fissati). Discutere la soluzione nei casi in cui il parametro R è vicino ai limiti dell'intervallo di stabilità.