

Argomento generale per vedere che ci aspettiamo fluttuazioni quantistiche dell'inflazione:

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - \frac{\nabla^2 \delta\varphi}{a^2} = -V''(\varphi)\delta\varphi$$

$$\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 = -V'(\varphi_0)$$

avendo usato  $\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x}, t)$

Derivo le equazioni rispetto al tempo:

$$(\dot{\varphi}_0)'' + 3H(\dot{\varphi}_0)' = -V''\dot{\varphi}_0 \quad (H = \text{const})$$

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - \frac{\nabla^2 \delta\varphi}{a^2} = -V''\delta\varphi$$

trascurabile nel limite  $\frac{k^2}{a^2} \ll 1$

$\Rightarrow \varphi_0$  e  $\delta\varphi$  obbediscono alla stessa equazione

Guardo le wronskiane  $W(x, y) = \dot{x}y - \dot{y}x$

Se  $W \neq 0$  sono indipendenti;

$$W(\dot{\varphi}, \delta\varphi) = \dot{\varphi}\delta\varphi - \dot{\delta\varphi}\varphi$$

$$\dot{W} = -3H W \Rightarrow W \propto e^{-3Ht} \rightarrow 0. \text{ Quindi dopo un po' le 2 soluzioni sono legate da una costante}$$

di proporzionalità

$$\delta\varphi(\vec{x}, t) \sim -\delta t(\vec{x}) \dot{\varphi}_0(t)$$

↑  
dipende da  $\vec{x}$  perché ho buttato via il gradiente

$$\Rightarrow \varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t - \delta t(\vec{x}))$$

quindi il campo scalare a seconda del posto acquisisce

lo stesso valore a tempi diversi (o a un certo  $t$  non ha lo stesso valore ovunque). È il risultato delle fluttuazioni

quantistiche.

## 2. PERTURBAZIONI COSMOLOGICHE dall'INFLAZIONE

(1)

da fluttuazioni quantistiche del campo  $\phi(\vec{x}, t)$

Abbiamo visto 2 equazioni:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} = -V'(\phi) \quad (1)$$

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 = -V'(\phi_0) \quad (2)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\vec{x}, t) \Rightarrow$$

Inserendo nella (1):

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \delta\phi}{a^2} = -V''\delta\phi \quad (\text{per piccole perturbazioni})$$

$\delta\phi$  è la fluttuazione quantistica.

N.B.: abbiamo un lento rotolamento  $V'' \ll H^2$  (o se il campo ha massa  $= 0$ )

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \delta\phi}{a^2} = 0$$

Risolvo l'equazione andando in Fourier space (NB: trasformata 3-dim x e ho dei termini che dipendono dal tempo):

$$\delta\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{\delta\phi}(\vec{k}, t)$$

onde piane anche in spazio-piatto.

$$\tilde{\delta\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{\delta\phi}(-\vec{k}, t)$$

L'equazione diventa:

$$\ddot{\delta\phi}_{\vec{k}} + 3H\dot{\delta\phi}_{\vec{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\vec{k}} = 0$$

Prima dei dettagli andamento qualitativo:

(2)

$$1) \lambda \ll H^{-1} \rightarrow k \gg aH$$

raggio di Hubble

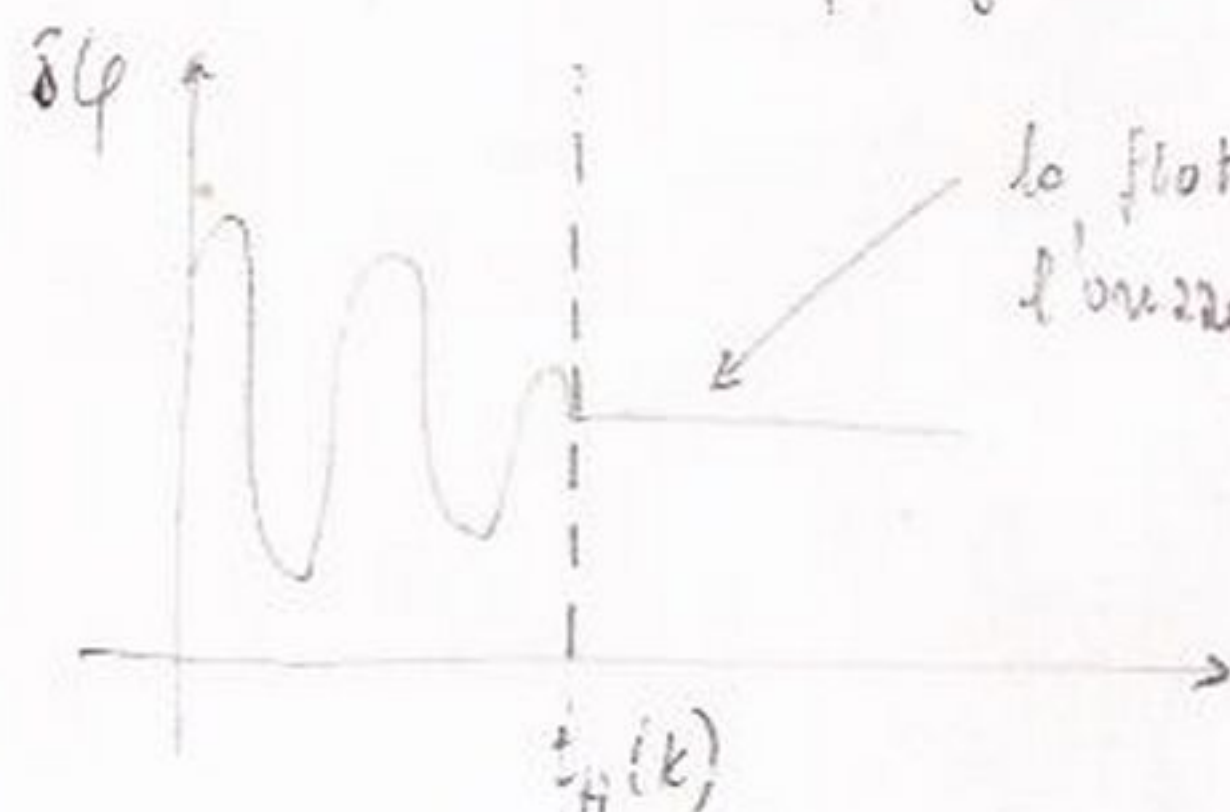
$$\Rightarrow \ddot{\delta\varphi} + \frac{k^2}{a^2} \delta\varphi = 0$$

$\delta\varphi$  oscilla (e lo si doveva aspettare: è come oscillare e ridursi ad uno spazio piatto se le scale sono molto piccole)

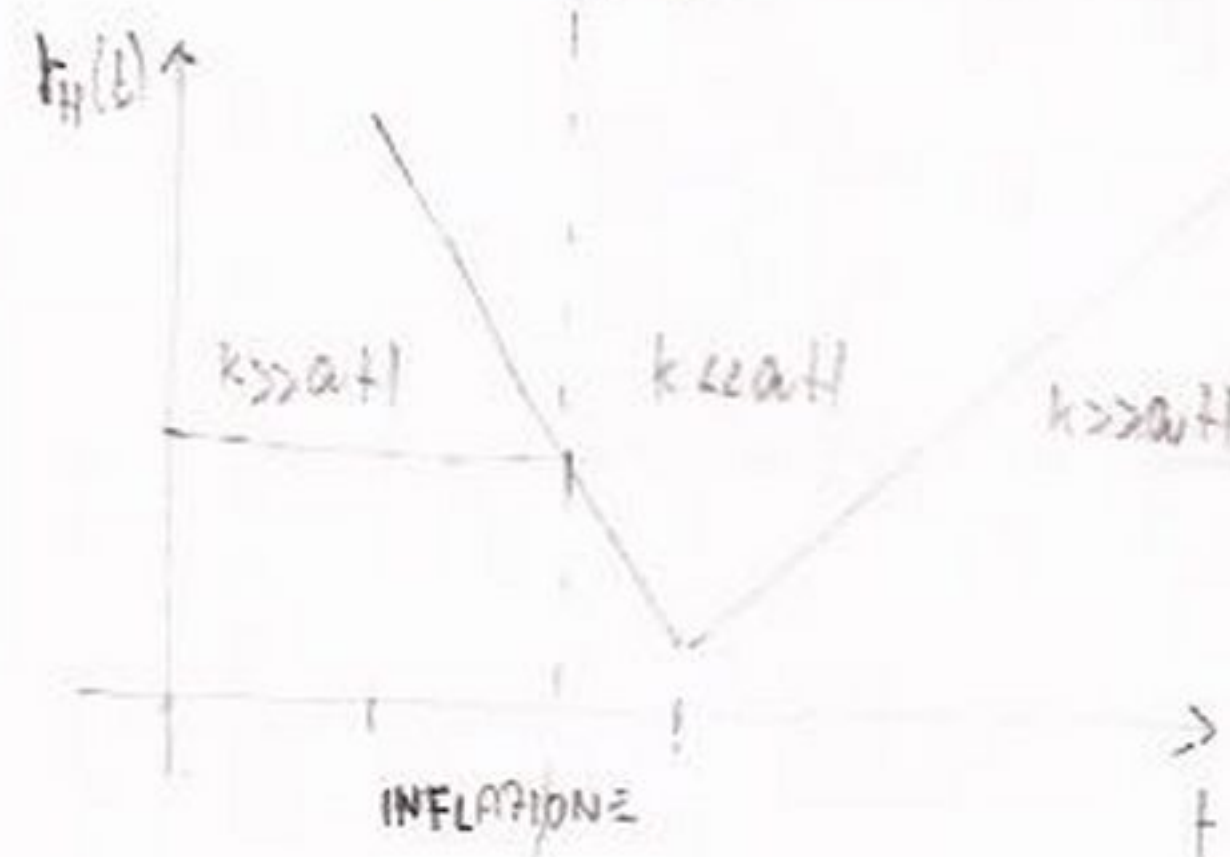
$$2) \lambda \gg H^{-1} \rightarrow k \ll aH$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} = 0$$

$\delta\varphi \approx \text{const.}$  su scale più grandi dell'orizzonte.



la fluttuazione è congelata sopra l'orizzonte (la fluttuazione non si propaga più e la sua ampiezza è congelata a causa di  $3H\dot{\delta\varphi}$ ).



la sua  $\lambda_{\text{phys}} \propto a \propto e^{Ht}$ . Se medio su tempi grandi  $\delta\varphi \neq 0$ : il risultato in finale è uno stato con un numero netto di particelle. In pratica è un meccanismo di amplificazione gravitazionale il cui punto cruciale è il fatto che  $H = \text{const}$  e i modi prima dentro l'orizzonte sono "stirati" fuori da esso.

Se l'eq. fosse classica avrei e costanti di integrazione;  
 Stanno per parlare di fluttuazioni quantistiche  $\rightarrow$  diventano operatori di creazione e distruzione (come la quantizzazione) (3)

Consideriamo  $\dot{\psi} = \omega \psi$  funzione classica del tempo

$$\psi(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ u_k(\tau) a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + u_k^*(\tau) a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right]$$

dove  $a_{\vec{k}}$  e  $a_{\vec{k}}^\dagger$  sono operatori di creazione e distruzione.

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0$$

$$\langle 0 | a_{\vec{k}}^\dagger = 0 ;$$

obbediscono alle regole di commutazione:  $[a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}] = -i \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$ ,

e  $u_k$  sono normalizzati secondo:  $u_k^* u_{k'} - u_k u_{k'}^* = -i \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$ ,  $\delta^{(3)} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$

Nello spazio piatto avrei  $u_k(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega_k}}$  (per piccole distanze, per il principio di equivalenza, devo poter riprodurre la metrica piatta che in meccanica quantistica mi porta a delle onde piane)

Nello spazio curvo le  $u_k(\tau)$  obbediscono alla:

$$u_k''(\tau) + \left( k^2 - \frac{a''}{a} + V a^2 \right) u_k = 0$$

dove  $\tau \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$ , con  $\tau$  tempo conforme  $\left( d\tau = \frac{dt}{a} \right)$

1) caso  $m=0$ , e spettrone di de Sitter ( $a \propto e^{Ht}$ ,  $H = \text{const.}$ ) (4)

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u_k = 0$$

$$\rightarrow d\tau = \frac{dt}{a} = dt e^{-Ht} \rightarrow \tau = -\frac{1}{H} e^{-Ht} = -\frac{1}{aH} \quad (\tau < 0, \text{ scegliendo opportunamente le costanti di integrazione})$$

$$\frac{a''}{a} (\text{de Sitter}) = \frac{2}{\tau^2} = 2 a^2 H^2 \propto (aH)^{-1} \text{ raggio di Hubble}$$

quindi per scale sotto l'orizzonte  $k^2 \gg \frac{a''}{a}$  e

$$u_k'' + k^2 u_k = 0 \rightarrow u_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (k \gg aH)$$

Per scale sopra l'orizzonte:

$$u_k'' - \frac{a''}{a} u_k = 0 \rightarrow (\text{modo crescente}) u_k = B(k) a(\tau) \quad (k \ll aH)$$

con  $B(k)$  costante di integrazione.

Faccio una approssimazione per trovare  $|B(k)|$ : un "matching" tra i 2 regimi quando la scala  $k$  attraversa l'orizzonte a  $k = aH$   
( $-k\tau = 1$ )

$$|B(k)| a = \frac{1}{\sqrt{2k}} \Rightarrow |B(k)| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$$

Ritorno alla variabile  $\delta\varphi$ :

$$\boxed{|\delta\varphi_k| \simeq |B(k)| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}} \quad \text{per i modi sopra l'orizzonte} \\ (k \ll aH)$$

N.B. : se sono in quasi de-Sitter

4bis

$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \neq 0$  e allora la scala attraversa l'orizzonte quando

$$k = a H_k$$

$$t|_k = t_*(k)$$

istante al quale la scala  $k$  attraversa l'orizzonte durante l'inflazione  $\Rightarrow$

otteniamo  $|\delta\varphi_k| \approx \frac{t|_k}{\sqrt{2k^3}}$

N.B. : soluzione tratta:

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\tau} \right)$$

$$k\tau \gg 1 : u_k(\tau) \sim \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}$$

$$|k\tau| \ll 1 : |u_k(\tau)| \sim \frac{1}{\sqrt{2k^3}} t|_k a(\tau) \rightarrow |\delta\varphi_k| \sim \frac{t|_k}{\sqrt{2k^3}}$$

Vediamo come ottenere una soluzione valida ad ogni  $\tau$ , che riproduca i due regimi estremi,  $k \ll aH$  e  $k \gg aH$ , considerati finora.

Campo scalare con massa trascurabile in quasi-de Sitter:

$$\ddot{H} = -\epsilon H^2, \quad \epsilon \ll 1$$

In questo caso i)  $a(\tau) \simeq -\frac{1}{H\tau(1-\epsilon)}$

ii)  $\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1-\epsilon) \rightarrow \frac{a''}{a} \simeq \frac{2}{\tau^2} \left(1 + \frac{3\epsilon}{2}\right)$

ii) e iii) ottenuti facendo uno sviluppo all'ordine più basso in  $\epsilon$

l'equazione per  $u_k$  diventa:

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u_k = 0 \rightarrow u_k'' + \left(k^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2}\right) u_k = 0$$

$$\nu^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon$$

N.B.: posso trattare  $\epsilon$  come costante perché sperando

all'ordine più basso in  $\epsilon$  mi ha che  $\dot{\epsilon} \sim O(\epsilon^2)$ .

Ho così una eq. di Bessel la cui soluzione è:

$$u_k(\tau) = \sqrt{-\tau} \left[ C_1(k) H_{\nu}^{(1)}(-k\tau) + C_2(k) H_{\nu}^{(2)}(-k\tau) \right]$$

Già che  $H_{\nu}^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})}$  ( $H_{\nu}^{(2)} = H_{\nu}^{(1)*}$ )

$\Rightarrow C_2(k) = 0, C_1(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i(\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}$  per avere l'normalizzato

(6)

oscillatorio su fronte reale  $\propto e^{-ik\tau}$

$$\Rightarrow M_k(\tau) = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}}_{c_1(k)} \sqrt{-\tau} H_{\nu}^{(1)}(-k\tau) \begin{cases} H_{\nu}^{(1)}(x) \sim \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}, & x \gg 1 \\ H_{\nu}^{(1)}(x) \sim x^{-\nu}, & x \ll 1 \end{cases}$$

Per i modi fuori dall'orizzonte:

$$H_{\nu}^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{2}} 2^{\nu - \frac{3}{2}} \left( \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) x^{-\nu} \Rightarrow$$

$$M_k(\tau) \simeq e^{i(\nu - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} 2^{(\nu - \frac{3}{2})} \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (-k\tau)^{\frac{1}{2} - \nu} x^{\frac{1}{2}} \sqrt{2k}$$

$k\tau \ll 1$

$$e^{i(\nu - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} 2^{(\nu - \frac{3}{2})} \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{1}{\sqrt{2k^3}} \left( \frac{k}{a+1} \right)^{\frac{3}{2} - \nu} \quad (k \ll a+1)$$

Già che  $\epsilon \ll 1$  e  $\nu^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon$  posso sviluppare in  $\epsilon \Rightarrow$

$$|S\varphi_k| = \frac{1}{\sqrt{2k^3}} \left( \frac{k}{a+1} \right)^{\frac{3}{2} - \nu}, \quad \frac{3}{2} - \nu = -\epsilon \quad \left( \text{poiché } \frac{3}{2} - \nu = \eta - \epsilon \text{ e includo la massa} \right)$$

N.R.: Posso scrivere  $H \simeq \frac{1}{k} \left[ 1 + \frac{H}{H^2} \ln\left(\frac{aH}{k}\right) \right] \simeq \frac{1}{k} \left( \frac{k}{aH} \right)^{\epsilon}$

$k = aH$

$$\Rightarrow |S\varphi_k| \simeq \frac{1}{\sqrt{2k^3}} \quad (\text{risultato che avevamo anticipato})$$

Commento: Se volemi tenere conto di una massa del campo scalare, piccole, ma non nulla

$$m^2 = V'' \ll H^2$$

$$u''_k + \left( k^2 - \frac{a''}{a} + m^2 a^2 \right) u_k = 0 \rightarrow \text{ho ancora l'equazione di Benett con adesso}$$

$$v^2 = \frac{9}{4} + 3\varepsilon - 3\eta$$

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{m^2}{H^2}$$

e riprendo tutte le espressioni precedenti con questa nuova

espressione di  $v \approx \frac{3}{2} + \varepsilon - \eta$  (all'ordine più basso in  $\varepsilon$  e  $\eta$ ) -

$$\sigma \quad \frac{3}{2} - v = \eta - \varepsilon$$

Una perturbazione di  $\delta\varphi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu}$ , una perturbazione nel tensore energia momento e a sua volta, attraverso le eq. di Einstein  $\delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta(Rg_{\mu\nu})$  e quindi  $\delta g_{\mu\nu}$ .

A sua volta  $\delta g_{\mu\nu}$  entrerà nella eq. di Klein-Gordon come perturbazione della metrica.

Quindi  $\delta\varphi \Leftrightarrow \delta g_{\mu\nu}$ , le fluttuazioni di  $\varphi$  sono strettamente legate a  $\delta g_{\mu\nu}$  (anche per questioni di gauge-invarianza).

Infatti in termini della quantità gauge-invariante

$$Q\varphi = \delta\varphi + \frac{\dot{\varphi}}{H}\psi \quad (\text{variante di Sasaki-Mukhanov})$$

si ottengono delle eq. del tipo:

$$\hat{Q}_{\varphi}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + M^2 a^2\right) \hat{Q}_{\varphi} = 0$$

con  $M^2 = 3\eta - 6\epsilon$  e risolvibile come al solito come

$$\text{una eq. di Bessel con } \nu \approx \frac{3}{2} + (3\epsilon - \eta) \left(\nu^2 = \frac{9}{4} + 9\epsilon - 3\eta\right)$$

si può riutilizzare le soluzioni viste prima.

Siccome  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$  uno poi arriva allo spettro  

$$\Delta(k) = \frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}$$

e quindi ad un indice spettrale fra le perturbazioni  
scalari:

$$n-1 = \frac{d \ln \Delta}{d \ln k} = 3-2\nu = 2\eta - 6\varepsilon$$

(ci vedremo anche note più avanti) -

Tutti i campi senza massa o molto leggeri sono eccitati in modo  
con uno spettro di potenza uguale a quello di un campo scalare  
senza massa.

Un esempio importante sono le onde gravitazionali

$$g_{ij} = a^2 (\delta_{ij} + h_{ij})$$

$$\text{con } h^i_i = 0, h^i_{j,i} = 0;$$

$$h_{ij} = h_{ji}$$

Le onde gravitazionali hanno 2 gradi di libertà che si  
propagano come due campi scalari minimamente accoppiati:

$$\phi_{+,x}$$

$$\text{con } h_{+,x} = \sqrt{32\pi G} \phi_{+,x}$$

$$\Delta_{h_{+,x}}(k) = 32\pi G \Delta_{\phi_{+,x}}(k) = \frac{32\pi}{M_{Pl}^2} \frac{H_*^2}{4\pi^2} = \frac{8}{\pi} \frac{H_*^2}{M_{Pl}^2}$$

$M_{Pl}^2 = G^{-1}$  \* indica il tempo al quale la scala  $k$  attraversa l'orizzonte durante  
l'inflazione

N.B.: siccome  $\frac{H_*^2}{M_{Pl}^2} \propto f_{\text{inflazione}} \approx V(\varphi)$  l'ampiezza delle

onde gravitazionali è  $\propto$  alla scala di energia a cui avviene  
l'inflazione.

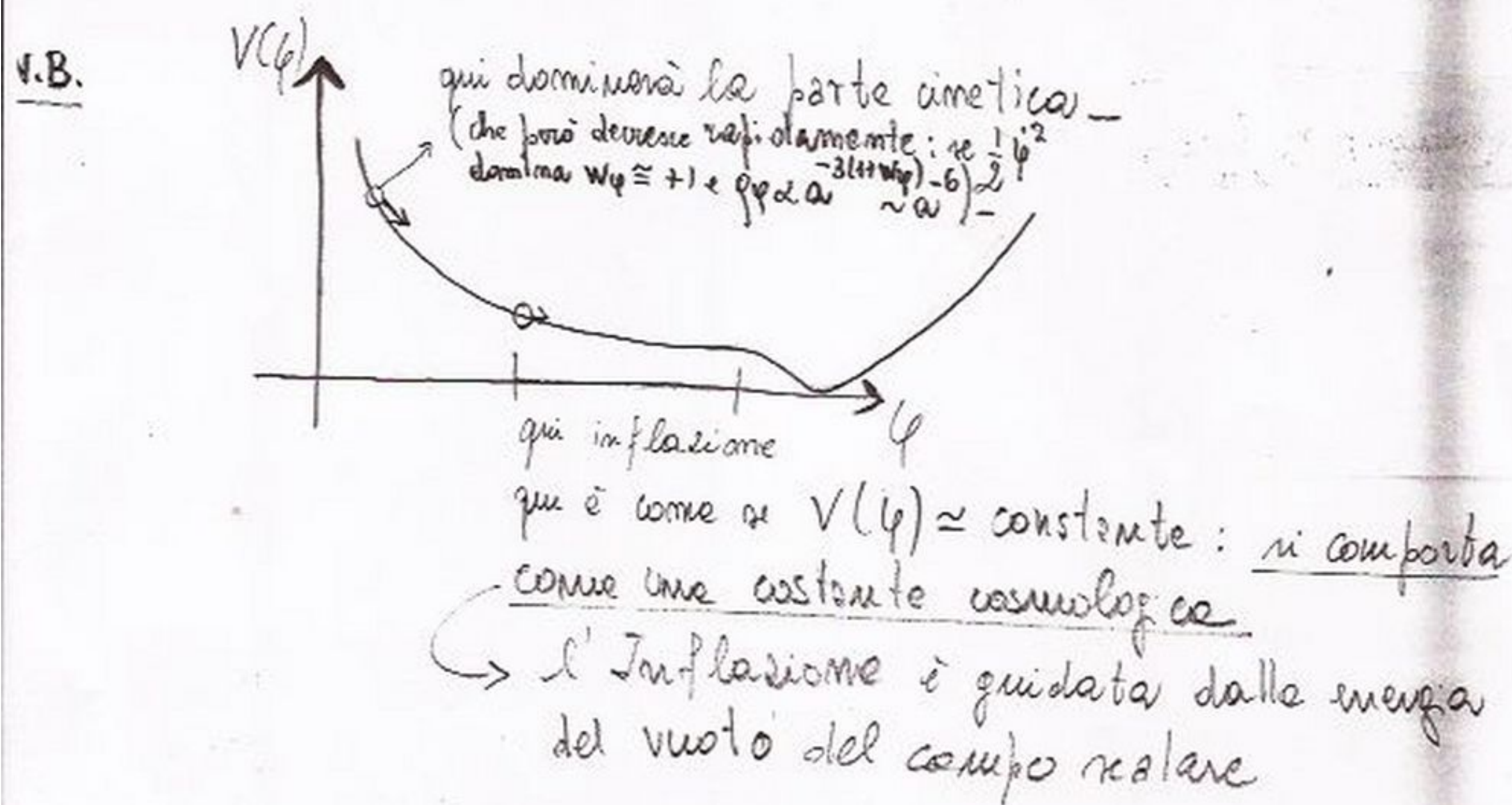
$$\text{L'indice spettrale è } n_T = \frac{d \ln \Delta_g(k)}{d \ln k} = -26.$$

iv) la cosa importante è che in  $p$  c'è  $-V(\phi)$ : è il potenziale che è un possibile candidato a dare uno  $p < 0$  (11)

Quindi: se  $V(\phi) \gg \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$

allora  $p \approx -\rho \rightarrow$  universo di de-Sitter.

Se l'universo è dominato da un campo scalare, e la energia potenziale domina quella cinetica si può avere inflazione.



1.B.:  $\rho \propto a^{-4} e^{\frac{Ht}{M_{Pl}}}$  e la materia ordinaria (barioni o radiazione/fotoni)

$$\rho_r \propto a^{-4}$$

$$\rho_b \propto a^{-3}$$

va a zero rapidissimamente: non spesso comincia a dominare  $V$ , viene spazzato via tutto - tranne  $V$  stesso -  
(no-hair cosmic theorem)

una cosa analoga dicasi  $\propto$  la curvatura  $K$

(e per la stessa ragione anche qualsiasi piccola disomogeneità viene cancellata non appena l'inflazione inizia)