Spettro di potenza

Come quantificare l'ampiezza delle fluttuazioni, cioè quanto grande è una fluttuazione a una certa scala k?

So che $\langle \delta\varphi \rangle = 0$. Allora mi interessa $\langle \delta\varphi(\vec{x}+\vec{r},t)\,\delta\varphi(\vec{x},t)\rangle$

↳ funzione di correlazione

In Fourier-space:

dato un campo generico $\delta(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\delta_{\vec{k}}(t)$

lo spettro di potenza è definito come

$$\langle \delta_{\vec{k}_1}\delta_{\vec{k}_2}\rangle = (2\pi)^3 \underbrace{P(k)}_{\text{invarianza x rotazioni}}\,\underbrace{\delta^{(3)}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)}_{\text{invarianza per traslazioni}}$$

Si può far vedere che $P(k)$ è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione.

Inoltre se calcolo la varianza $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ trovo che

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} dk\, k^2 P(k) = \int_0^{+\infty} \Delta(k)\,\frac{dk}{k}$$

$$\Delta(k) = \frac{1}{2\pi^2}P(k)\,k^3$$

In ambito inflazionario si è soliti usare $\Delta(k)$

In generale si definisce come <u>indice spettrale</u> dello spettro di potenza delle perturbazioni scalari la quantità:

$$n_s - 1 = \frac{d\ln \Delta(k)}{d\ln k}$$

Descrive come le perturbazioni dipendono dalle scale cosmologiche (descrive la forma dello spettro).
Per esempio, se n_s si può considerare costante, allora gli spettri di potenza hanno una legge di potenza:

$$\Delta(k) = \Delta(k_0)\left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s - 1}$$

con k_0 una certa scala di riferimento.

Nel caso di un campo scalare, usando gli operatori di creazione e distruzione

$$\langle 0|\delta\varphi_{\vec{k}_1}\,\delta\varphi^*_{\vec{k}_2}|0\rangle \to \quad \langle 0|a\,a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger a^\dagger|0\rangle = 0$$

l'unico non nullo è $\langle 0|a\,a^\dagger|0\rangle \Rightarrow$

$$\langle \delta\varphi_{\vec{k}_1}\,\delta\varphi^*_{\vec{k}_2}\rangle = (2\pi)^3 |\delta\varphi_k|^2\,\delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \Rightarrow$$

$$P(k) = |\delta\varphi_k|^2 \quad \text{o} \quad \Delta(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}|\delta\varphi_k|^2 \quad \text{dove } \delta\varphi_k = \frac{u_k}{a}$$

Per de-Sitter e campo scalare molto leggero $(m \ll \frac{3}{2}H)$ si è visto che:

$$|\delta\varphi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu} \qquad \frac{3}{2}-\nu \simeq \frac{m^2}{3H^2}$$

su scale più grandi dell'orizzonte troviamo:

$$\Delta(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu} \qquad 3-2\nu = \frac{2}{3}\frac{m^2}{H^2}$$

Per le onde gravitazionali (modi tensoriali) il calcolo è del tutto analogo (si veda quanto già anticipato nelle note sulle onde gravitazionali)...