

Appunti per il corso

"Cosmologia dell'Universo primordiale"

2016 - 2017

Nicola Bartolo

Orizzonti cosmologici

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (1)$$

$d_H(t)$ definisce il raggio di una sfera (centrata sull'osservatore O) entro la quale si trovano l'insieme di punti che sono stati in connessione causale con l'osservatore. In altre parole $d_H(t)$ rappresenta la ~~max~~ massima distanza i punti di massima distanza con i quali l'osservatore O è entrato in connessione causale.

Per ottenere (1): $ds^2 = 0$ per un segnale di luce.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dl^2$$

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$ds^2 = 0 \Rightarrow dl = \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \Rightarrow \text{proper distance } a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}$$

Alcune osservazioni:

- si tratta dell'orizzonte per il passato

- se $d_H = \infty$ non c'è orizzonte; se d_H esiste finito la superficie sferica di raggio d_H centrata in O si dice "particle horizon" dell'osservatore al tempo t .

□ Espressioni di $d_H(t)$ per le cosmologie standard ($p = w\rho$)

$$a(t) \propto t^2$$

$$\lambda = \frac{2}{3(1+w)}$$

$$\Rightarrow d_H(t) = \frac{3(1+w)ct}{1+3w} \sim ct \sim \frac{c}{H(t)}$$

soluzione per $\Omega_w = 1$

$$H(t) = H_0 \frac{t_0}{t} = \frac{2}{3(1+w)t}$$

~~$p = w\rho$~~

converge per $\lambda < 1$ in $t=0$,

N.B. : $\lambda < 1 \Leftrightarrow w > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \ddot{a} < 0$ per l'eq. di Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a$$

cioè in un universo ad espansione decelerata l'orizzonte esiste -

□ Esempi particolari: - $d_H(t) = 3ct$, per Universo piatto e fatto di polvere ($w=0$) (Einstein-de Sitter)

- $d_H(t) = 2ct$, Universo piatto e fatto di radiazione -

□ distinzione tra "particle horizon" orizzonte e "Hubble sphere"

(4)

$$R_c = \frac{c}{H} = \frac{3}{2}(1+w)$$

$$\Omega_w = 1 \rightarrow H(t) = \frac{2}{3(1+w)t} \Rightarrow R_c = \frac{3}{2}(1+w)ct = \frac{(1+3w)}{2} d_H(t) \sim d_H(t) \quad (w > -\frac{1}{3})$$

N.B.

Definendo "Hubble time" come tempo caratteristico di espansione dell'Universo

$$R_c = c \tau_H = c \frac{a}{\dot{a}} \quad \tau_H = \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{H}$$

Importante: sebbene ~~per~~ accade che in un universo piatto $R_c \sim d_H$, "Hubble sphere" e "particle horizon" sono concettualmente diversi.

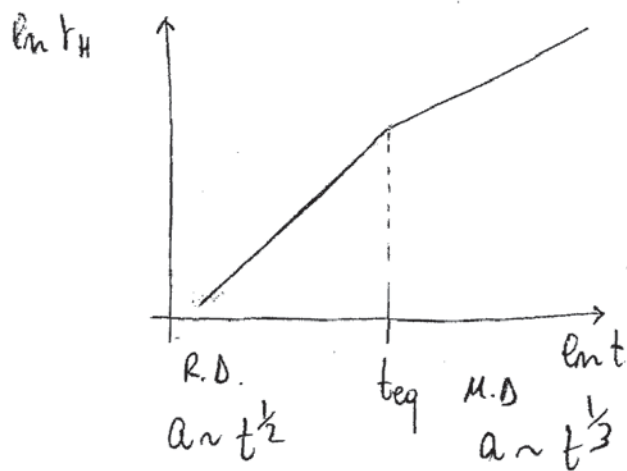
La differenza è che il "particle horizon" al tempo t , $d_H(t)$, tiene conto dell'intera storia passata dell'osservatore fino al tempo t , mentre il raggio di Hubble tiene conto delle connessioni causali verificatesi in un tempo di Hubble H^{-1} .

□

$$r_H(t) = \frac{R_c}{a} = \frac{1}{\cancel{a}} \frac{1}{aH} = \frac{1}{\dot{a}}$$

②

$r_H =$ raggio comoviente di Hubble



R.D. $a(t) \propto t^{1/2} \rightarrow r_H \propto t^{1/2} \propto a$

M.D. $a(t) \propto t^{2/3} \rightarrow r_H \propto t^{1/3} \propto a^{1/2}$

N.B

$$\frac{r_H(t)}{a} = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{aH} = \int_0^a \frac{da'}{a'} r_H$$

questo mostra che il comoving particle horizon è dato dall'integrale logaritmico del comoving Hubble radius

Osservazioni :

□ valori medi locali o globali?

□ orizzonte oggi $d_H(t_0) = \frac{2}{H_0} R_c(t_0) (w=0)$

$$= 2H_0^{-1} = 2 \times 3'000 h^{-1} \text{ Mpc}$$

Limiti importanti : $\sim 100 \text{ Mpc} - 3'000 \text{ Mpc}$ (vale dove posso adottare Λ RW)

$$H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \text{ (satellite Planck 2015)}$$

N.B. : $\lambda_{\text{phys}} = a \lambda_{\text{com}}$ in riferimento al grafico di $r_H(t)$.

PROBLEMA dell'ORIZZONTE

Una regione di lunghezza caratteristica λ può diventare causalmente connessa solo quando $R_H = \lambda$.

Consideriamo gli usuali modelli di Friedmann (caso piatto per semplicità)

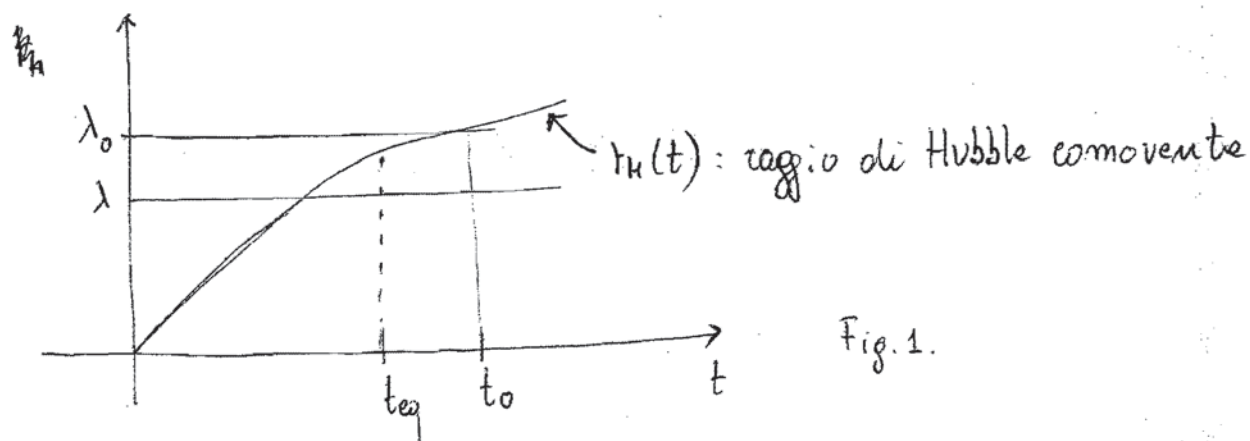


Fig. 1.

→ $\lambda_c = \text{const}$ - entra nell'orizzonte a un certo $t_H(\lambda)$: $\lambda_c = r_H(t_H(\lambda))$.
Questo vuol dire che processi che si verificano a t non possono commettere causalmente la regione di dimensioni λ fino a $t \leq t_H$ quando

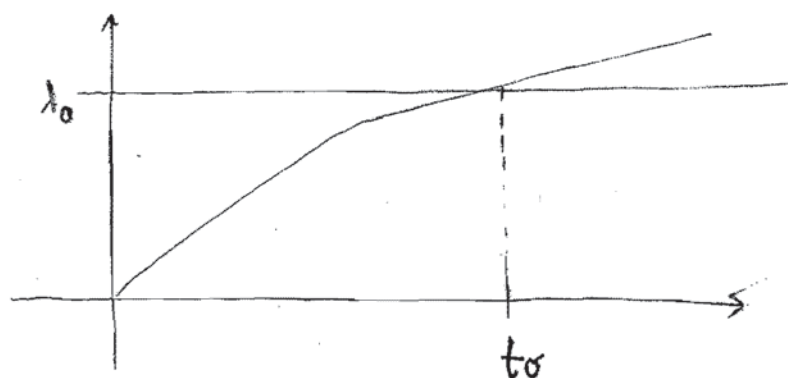


Fig. 2

E quindi il problema dell'orizzonte è il seguente:

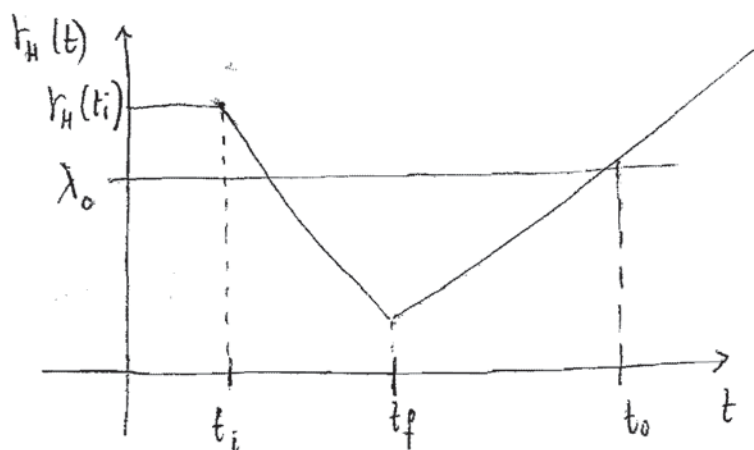
come mai zone che non erano in connessione causale hanno caratteristiche simili, come l'omogeneità e l'isotropia, anche se all'epoca non potevano comunicare?

N.B.: l'esempio di figura 2 si può semplicemente applicare al caso di long-wavelengths per il CMB - (vedi Dodelson box + Fig 6.1)

SOLUZIONE INFLAZIONARIA :

(7)

Posso risolvere il problema dell'orizzonte pensando che in una prima fase dell'universo r_H sia diminuito



in questo modo le regioni di dimensioni λ ~~entrano~~ che entrano per la prima volta nell'orizzonte, in realtà erano già diventate causalmente connesse durante questa prima fase dell'universo $\Rightarrow$ ho risolto il problema della connessione causale.

In termini quantitativi:

$$r_H = \frac{1}{\dot{a}} \Rightarrow \dot{r}_H = \left(\frac{1}{\dot{a}} \right)' = - \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{a} > 0}$$

Quindi parleremo di inflazione in tutta generalità quando si ha che $\ddot{a} > 0$; ovvero l'espansione dell'universo procede in modo accelerato, cioè l'universo si è fortemente espanso (inflazione gonfiare).

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a > 0 \Leftrightarrow p < -\frac{1}{3}\rho \Leftrightarrow w = \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3}, \text{ cioè } \underline{\text{pressione negativa}} \text{ e con } p < -\frac{1}{3}\rho$$

N.B. : Per risolvere il problema dell'orizzonte, non è sufficiente dire

che $\ddot{a} > 0$, ma ciò deve avvenire già un po' prima in $\dots$ (8)

N.B : Importante accennare a cosa succede in termini di $\lambda_{\text{phys}} \propto a$, e non solo comoventi.

Una regione di dimensioni $a(t_i) r_H(t_i)$ si "gonfia" di un fattore

$$Z = \frac{a(t_f)}{a(t_i)}$$

$$Z = \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \exp \int_{t_i}^{t_f} dt' H(t') = e^{N_{\text{inf}}} \rightarrow n^{\circ} \text{ di e-foldings}$$

$$N_{\text{inf}} = \int_{t_i}^{t_f} dt' H(t') = \log \left(\frac{a_f}{a_i} \right)$$

$$N = \log\left(\frac{a_f}{a_i}\right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt$$

Calcolo del n. di e-foldings necessario per risolvere il problema dell'orizzonte (2)

$$z_H(t_0) \leq z_H(t_i)$$

$$a_0 z_H(t_0) = H_0^{-1} \leq z_H(t_i) a_0 = z_H(t_i) a_i \frac{a_0}{a_i} = H_I^{-1} \left(\frac{a_0}{a_i} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_i}{a_0} \right) H_0^{-1} \leq H_I^{-1}$$

$$\left(\frac{a_i}{a_f} \right) \left(\frac{a_f}{a_0} \right) H_0^{-1} \leq H_I^{-1} \rightarrow e^{-N} \left(\frac{T_0}{T_f} \right) H_0^{-1} \leq H_I^{-1} \Rightarrow$$

$$N \geq \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \ln\left(\frac{H_I}{T_f}\right)$$

$\uparrow$ 10^{13} GeV
 $\downarrow$ 10^{-42} GeV

$$N \gtrsim (60 \div 70)$$

T_f : temperatura di reheating

$$H_I^2 \approx \frac{8\pi}{3 M_{Pl}^2} \rho_r \sim \frac{8\pi}{3 M_{Pl}^2} \cdot \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \sim \frac{T_f^4}{M_{Pl}^2} \sim \frac{T_f^4}{T_{Pl}^2}$$

$$\Rightarrow N \geq \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_{Pl}}\right)$$

~ 67

$\in [0, -1]$

si considera un intervallo $10^{-5} \leq \frac{T_f}{T_{Pl}} \leq 1$

$$N \geq [56, 67]$$

Problema della piattezza (modo veloce di impostare il problema e la soluzione)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (1)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \rightarrow (2) \quad \rho \propto a^{-3(1+w)}$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{3H^2}{8\pi G} \cdot \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$$

Quindi, dividendo per H^2 , da (1) ho:

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{k}{\dot{a}^2} \equiv k r_H^2(t)$$

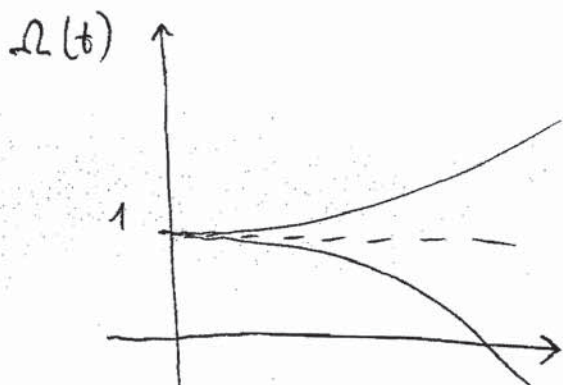
Se l'univ. è perfettamente piatto $\Omega(t) = 1$; se $\Omega(t) \neq 1$ anche per una piccola quant.
Siccome durante l'epoca dominata dalla radiazione e dalla materia

$r_H(t)$ cresce, $|\Omega(t) - 1|$ cresce col tempo.

(col tempo il termine k diventa sempre più importante)

$$R.D.: H^2 \propto \rho \propto a^{-4} \rightarrow |\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2 a^{-4}} = a^2$$

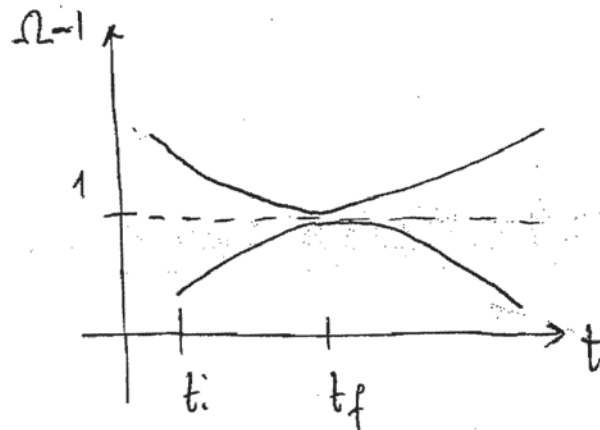
$$M.B.: H^2 \propto \rho_m \propto a^{-3} \rightarrow |\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2 a^{-3}} = a$$



Soluzione inflazionaria per il problema della piattezza:

$$\Omega(t) - 1 = k r_H^2(t)$$

durante l'inflazione $\ddot{a} > 0$ e $r_H(t)$ decresce molto rapidamente $\Rightarrow$



ho un andamento asimmetrico e durante l'inflazione $|\Omega - 1|$ viene schiacciato molto vicino allo zero.

Ricordiamo i limiti osservativi più recenti su $(-\Omega_0 + 1) \equiv \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}$:

$$|\Omega_k| < 0.005 \text{ (95\% C.I.)}, \text{ quindi deduciamo } |\Omega_k| < 10^{-2} \text{ (95\% C.I.)}$$

... you consider the Friedmann equation (12)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho a^2}{3} - k =$$

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{k}{\dot{a}^2}$$

$$\frac{k}{\dot{a}^2} + \dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho a^2}{3}$$

$$\frac{8\pi G \rho a^2}{3} = \Omega(t) \cdot \dot{a}^2 = \Omega(t) \cdot \frac{k}{\Omega(t) - 1} \Rightarrow$$

$$(1 - \Omega^{-1}) \cdot \rho a^2 = \text{const.}$$

$$\boxed{(1 - \Omega^{-1}) \rho a^2 = \text{const}} = (\Omega_0^{-1} - 1) \rho_0 a_0^2 \quad (*)$$

$t < t_{eq}$:

$$(\Omega^{-1} - 1) \cdot \rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4 \cdot \frac{a^2}{a_0^2} \cdot \frac{1}{\rho_0} = (\Omega_0^{-1} - 1)$$

$$\rho_{eq} = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^3$$

$$(\Omega^{-1} - 1) \cdot \cancel{\rho_0} \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^3 \cdot \left(\frac{a_{eq}}{a}\right)^4 \cdot \frac{a^2}{a_0^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\rho_0}} = (\Omega_0^{-1} - 1)$$

$$(\Omega^{-1} - 1) \frac{a_0 \cdot a_{eq}}{a^2} = (\Omega_0^{-1} - 1)$$

$$(\Omega^{-1} - 1) = (\Omega_0^{-1} - 1) \frac{a^2}{a_0 \cdot a_{eq}} = (\Omega_0^{-1} - 1) \cdot (1 + z_{eq})^{+1} \cdot \left(\frac{T_0}{1}\right)^2$$

$$(1 + z_{eq}) \approx 2.34 \times 10^4 \Omega_m h^2$$

$$\rightarrow (\Omega^{-1} - 1) \approx (\Omega_0^{-1} - 1) \cdot \left(\frac{T_{PI}}{\pi}\right)^2 \cdot 10^{-60} (\Omega_m h^2) \rightarrow \Omega(t_{PI}) \approx 1 + (\Omega_0 - 1) \cdot 10^{-60}$$

calcolo aggiuntivo del parametro di densità a tempi primordiali

Per tanto, visto che $|\Omega_0 - 1| < 10^{-2} \rightarrow |\Omega - 1|_{t_{PI}} < 10^{-62}$; (100 D10)

quindi se oggi c'è anche una piccola deviazione di Ω_0 da 1, a tempi primordiali Ω deve essere determinato ad essere vicino ad 1 con una precisione di una parte su 10^{62} (almeno), senza essere esattamente 1 (problema di "fine-tuning").

Qui abbiamo scelto $t = t_{PI}$, ma se anche scegliessimo $t = t_{nucleosintesi}$ ($T_N \approx 1 \text{ MeV}$) otterremmo in ogni caso $|\Omega - 1|_{t_{nuc.}} < 10^{-18}$.

Calcolo del m. e-folds necessario per risolvere il problema (13)

$$(\Omega_i^{-1} - 1) \rho_{ai}^2 = (\Omega_0^{-1} - 1) \rho_{ao}^2 \quad \text{della piattezza}$$

$$\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}} \geq 1 : \text{condizione per risolvere il problema della piattezza.}$$

$$(\Omega_i^{-1} - 1) = (\Omega_0^{-1} - 1) \frac{\rho_{ao}^2}{\rho_{ai}^2} = (\Omega_0^{-1} - 1) \frac{\rho_{ao}^2}{\rho_{aq}^2} \frac{\rho_{eq}^2}{\rho_{af}^2} \frac{\rho_{af}^2}{\rho_{ai}^2}$$

In tutta generalità:

$$\frac{\rho_{af}^2}{\rho_{ai}^2} \sim \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3w_{inf})}$$

$$\left(\frac{a_o}{a_{eq}} \right)^{-1} \downarrow \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3w_{inf})} \downarrow \left(\frac{a_{eq}}{a_f} \right)^{-2}$$

e consideriamo i periodi:

$$t_{inf} \propto a^{-3(1+w_{inf})}; \quad w_{inf} < -\frac{1}{3}$$

$$[t_f, t_{eq}] : \rho \propto a^{-4}$$

$$[t_{eq}, t_0] : \rho \propto a^{-3}$$

$$\left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3w_{inf})} = \frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1} \cdot X$$

$$X = \frac{a_o}{a_{eq}} \left(\frac{a_i}{a_{eq}} \right)^2 \left(\frac{a_{eq}}{a_f} \right)^2 = \frac{a_o a_{eq}}{a_f^2} = (1+z_{eq})^{-1} \left(\frac{T_f}{T_o} \right)^2 = (1+z_{eq})^{-1} \left(\frac{T_{PI}}{T_o} \right)^2 \left(\frac{T_f}{T_{PI}} \right)^2$$

$$\approx 40^{60} \cdot \left(\frac{T_f}{T_{PI}} \right)^2$$

$$N \geq \frac{\ln(X)}{|1+3w_{inf}|} = \frac{60 \left[2.3 + \frac{1}{30} \ln \left(\frac{T_f}{T_{PI}} \right) \right]}{|1+3w_{inf}|}$$

$$N_{min} = \ln(X) \quad \text{se } w_{inf} \approx -1 \text{ e } 10^{-5} \leq \frac{T_f}{T_{PI}} \leq 1 \rightarrow N \geq 60 \div 70.$$

$$N_{\min} \in (60 \div 70)$$

Predizione dei modelli inflazionari
per il parametro di densità oggi Ω_0

(14)

$$N \geq N_{\min}$$

$$N = p \cdot N_{\min} \quad p > 1$$

relazione tra $(\Omega_0^{-1} - 1)$ e $(\Omega_i^{-1} - 1)$: dal calcolo di prima

$$\left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3W_{\inf})} \sim \frac{(1 - \Omega_i^{-1})}{(1 - \Omega_0^{-1})} \cdot X \sim \frac{(1 - \Omega_i^{-1})}{(1 - \Omega_0^{-1})} e^{N_{\min} |1+3W_{\inf}|}$$

$$N_{\min} = \frac{\log X}{|1+3W_{\inf}|}$$

$$\rightarrow e^{p N_{\min} |1+3W_{\inf}|} \sim \left(\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}} \right) \cdot e^{N_{\min} |1+3W_{\inf}|}$$

$$\rightarrow (\Omega_0^{-1} - 1) \sim \frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\exp[(p-1)N_{\min} |1+3W_{\inf}|]} \sim \underbrace{(\Omega_i^{-1} - 1)}_{\sim 1} 10^{-[60 + \ln(\frac{1}{T_{pl}})]}$$

se prendo per esempio $p=2$ e
 $W_{\inf} \approx -1$

Poiché durante l'inflazione $H \approx \text{const.} \rightarrow$

$$|\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2 H^2} \propto \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} \sim \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N}$$

Prendendo $|\Omega - 1|_{t_i} \sim 1$.

Ricorrendo che oggi $|\Omega_0 - 1| < 10^{-2}$ e che $\Omega(t_{PI}) \approx 1 + (\Omega_0 - 1) \times 10^{-60}$,
richiederemo che $|\Omega - 1|_{t_{PI}} < 10^{-62}$

Se prendo $|\Omega - 1|_{t_f} \sim |\Omega - 1|_{t_{PI}} \Rightarrow$ devo richiedere $\boxed{N \gtrsim 70}$

Il calcolo qui sopra è un altro modo di vedere se le n^2 di e-folds necessari per risolvere il problema della piattezza (più approssimato e veloce di quello a pag. 13). Mette in evidenza il carattere di soluzione attrattiva dell'inflazione verso quelle condizioni iniziali che attualmente, nell'ambito del modello del Big-Bang caldo, apparirebbero come estremamente peculiari.