

1. DINAMICA dell'INFLAZIONE -

2. PERTURBAZIONI COSMOLOGICHE dall'INFLAZIONE -

Inflazione: un periodo durante il quale

$$\ddot{a} > 0$$

per un tempo sufficiente da poter risolvere i problemi dell'orizzonte e della piattezza

$$\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow p < -\frac{1}{3}\rho$$

N.B.: no RADIATION or MATTER-DOMINATED PHASE $\Rightarrow$ di nuova inflazione avviene prima dello nucleosintesi primordiale ($t_{\text{nuc}} \sim 1 \text{ sec}$; $T_{\text{nuc}} \sim 1 \text{ MeV}$)

Ricordiamo che una fase di de-Sitter è un periodo durante il quale $p = -\rho$ ($w = -1$)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \rightarrow \rho = \text{const} \Rightarrow H = \text{const} \Rightarrow a = a_i e^{H(t-t_i)}$$

(curvature K is soon redshifted away)

X Ricorda definizione n° e-foldings $N_{\text{TOT}} = \int_{t_i}^{t_f} H dt$ che deve essere almeno compreso tra 50 e 70 -

Chi è un possibile candidato con $\dot{\phi} < -\frac{1}{3}\dot{\rho}$?

(2)

Un campo scalare -

Di seguito consideriamo:

1. Perché un campo scalare? Come si deduce ^{in un universo in espansione} quali sono le sue caratteristiche?
2. Come si studia la dinamica di un campo scalare in un universo in espansione?
3. Caratterizzazione di vari modelli -

4. Da fluttuazioni quantistiche dell'inflatone alle prime perturbazioni di densità (che danno poi origine alle fluttuazioni in temperatura del CMB e a tutte le strutture che osserviamo nell'universo).

(3)

Un tipico esempio di una fase di de-filter ni ha se la densità di energia è dominata da una costante cosmologica:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3} \rightarrow a \propto \exp\left(\frac{\Lambda}{3}t\right)$$

Il termine cosmologico Λ fu introdotto da Einstein in quanto permette la covarianza generale delle eq. di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1)$$

N.B. (1) vale con segnatura $(-, +, +, +)$

(in questo senso Λ ha un significato geometrico).

D'altra parte la attuale interpretazione è quella che ρ_Λ e p_Λ siano la pressione e la densità di energia del vuoto quantistico, intero come lo stato di base di un sistema quantistico (qualvanti contributo particolare alla densità di energia del vuoto).

Questo lo si vede considerando che il tensore energia-momento sullo stato di vuoto deve essere lorentz invariante e quindi:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\langle \rho \rangle g_{\mu\nu}$$

Quindi $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ si comporta come Λ (sarebbe una $\Lambda = 8\pi G \langle \rho \rangle$).

Viceversa si può dire che la costante cosmologica contribuisce alla energia totale del vuoto con una $\rho_{\text{vuoto}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Questo fa capire che in presenza di gravità bisogna tenere conto anche l'energia del vuoto, e che questa non può più essere uguale a zero come si fa in un classico piatto

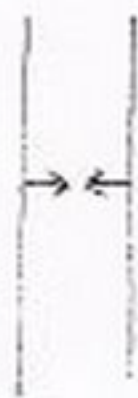
di Minkowski -

A cosa ci riferiamo quando parliamo della energia del vuoto? ⁽⁴⁾

All'energia relative alle fluttuazioni quantistiche nello stato di vuoto (in Minkowsky è infinita, la posto $\rho_{vac} = 0$, ridefinendo il punto zero; in presenza di gravità tutto fa al principio di equivalenza). Non è vero che nel vuoto ^{quantistico} non ci sono particelle: queste sono continuamente create e distrutte -

A parte l'esempio della costante cosmologica, un altro è ^{relativo} all'effetto Casimir:

se si prendono due piastre metalliche neutre molto vicine, pure in ^{assenza} di cariche si misura una forza (attrattiva)



Quello che succede è che il vuoto "si accorge" che ^{ci sono le piastre} (è una condizione al contorno che si impone al campo e.m.)
E' l'esempio di una forza con $\rho < 0$ dovuta al vuoto quantistico -

NB: è un esempio in cui si capisce che x definisce uno stato di vuoto e importante considerare le condizioni al contorno; lo stato di vuoto è lo stato con il massimo numero di ^{simmetrie} conserve nell'ambiente in cui "vive" (per uno spazio di Minkowski il vuoto è invariante per il gruppo di Poincaré)

Che tipo di campo può dare le fluttuazioni quantistiche tali che $\rho < -\frac{1}{3}\rho$?

Come anticipazione di quello che verrà spiegato meglio in seguito il tensore energia momento di un campo scalare è:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_\phi g_{\mu\nu}$$

$$\text{con } \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - V(\phi)$$

Una condizione che $\phi = \langle \phi \rangle = \text{cost.}$ corrisponde al minimo del
Valori medi di ϕ sullo stato di vuoto

potenziale (classico) (lo stato di base del sistema) $\Rightarrow$

$$T_{\mu\nu} = -V(\langle \phi \rangle) g_{\mu\nu} : \text{energia del vuoto associata al campo scalare.}$$

Quindi prendiamo un campo scalare sullo stato di vuoto:

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle \equiv \langle \phi \rangle \neq 0$$

Essendo un campo scalare, in un universo di Robertson-Walker non può che essere $\langle \phi \rangle = f(t)$

NB: non posso avere $\langle A_\mu \rangle \neq 0$: con un quadrivettore avrei una direzione privilegiata, non ammissibile in R.W.

non posso avere $\langle \vec{\gamma} \rangle \neq 0$ (fotoni): avere inoltre una direzione privilegiata

Potrei avere $\langle \vec{\chi} \vec{\chi} \rangle \neq 0$ (condensato fermionico) se è uno

scalare. Proposti in fisica delle particelle nel caso che non ^⑥
scalari fondamentali (bosone di Higgs)

↓
introdotto nella fisica delle particelle per dare massa
ai bosoni intermedi e fermioni; e nei primi
modelli inflazionari si è tentato di
identificarlo col campo scalare responsabile dell'in-
flazione.

Quindi la cosa più naturale è considerare un campo scalare
reale $\phi(\vec{x}, t)$ tale che

$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) | 0 \rangle = f(t)$, cioè il valore di aspettazione nello stato di
vuoto è al più una funzione del tempo (in R.W). Esso rappresenta
il valore di background classico del campo.

- Dinamica di un campo scalare in l'universo in espansione (7)

Il sistema si deriva con una azione (o densità di Lagrangiana) in relatività generale:

$$S_{\Phi}[\Phi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\Phi}[\Phi, g_{\mu\nu}]$$

notare la dipendenza dalla metrica

quindi una densità azione:

- campo scalare Φ
- campo gravitazionale (cioè metrica)
- resto del mondo (fermioni, bosoni di gauge, altri campi scalari). In genere lo si deriva come un fluido.

Per un campo scalare reale:

$$\mathcal{L}_{\Phi} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - V(\Phi)$$

(con $\star$ segnatura $(-, +, +, +)$)

← termine cinetico canonico

← potenziale

Quindi come in uno spazio piatto di Minkowski ma con $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ tensor metrico dello spazio curvo, e con derivate covarianti.

$V(\Phi)$: contiene le self-interactions del campo scalare.

$$\text{ex: } V(\Phi) = m_{\Phi}^2 \frac{\Phi^2}{2}$$

massa delle particelle (che cosa sono le particelle?)
 $V(\Phi)$ contiene anche in generale le interazioni del campo scalare con il resto del mondo (in genere trascurabili nello scenario inflazionario).

Dall'azione $S\phi$ del campo scalare uno ottiene la equazione del moto:

$$\frac{\delta S\phi}{\delta \phi} = 0 \rightarrow \square \phi = + \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

> NB: la segnatura metrica $(-, +, +, +)$
adattamenti con segno -

dove nello spazio curvo il D'Alembertiano è definito come:

$$\square \phi = \phi_{;a}{}^{;a} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \phi_{,\mu} \right)_{,\nu} \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

Consideriamo la metrica di R.W. (con $K=0$): (qui uso $(-, +, +, +)$)

$$\sqrt{-g} = a^3(t) \text{ e}$$

$$\square \phi = \frac{1}{a^3(t)} \left[\left(g^{00} a^3 \phi_{,0} \right)_{,0} + \left(g^{ii} a^3 \phi_{,i} \right)_{,i} \right]$$

$$\square \phi = \frac{1}{a^3(t)} \left[(-a^3 \phi_{,0})_{,0} + (a \phi_{,i})_{,i} \right]$$

$$\square \phi = -\ddot{\phi} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^3} \dot{\phi} + \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} \Rightarrow$$

$$\ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} = - \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

: equazione di un campo
scalare (quantistico) nella
metrica di R.W.

N.B: i) non abbiamo considerato perturbazioni nella metrica
per il momento

ii) se $\phi(\vec{x}, t) \equiv \phi_0(t)$ allora: $\nabla^2 \phi_0 = 0$ e

$$\ddot{\phi}_0(t) + 3H \dot{\phi}_0(t) = - \frac{\partial V}{\partial \phi}(\phi_0)$$

Al campo scalare Φ si può associare anche un tensore energia-momento ⁽⁹⁾
 $T_{\mu\nu}^\Phi$ (deve essere un tensore e avere quadridivergenza nulla) -

$$T_{\mu\nu}^\Phi := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \quad \text{se signature } (-, +, +, +) -$$

Si trova:

$$T_{\mu\nu}^\Phi = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[-\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\Phi)}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{\partial \partial_\alpha(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\Phi)}{\partial \partial_\alpha g^{\mu\nu}} \right] \quad \begin{array}{l} \text{se uso signature } (-, +, +, +). \\ \text{(risultato del tutto generale)} \end{array}$$

$$T_{\mu\nu}^\Phi = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\Phi = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + g_{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Phi_{,\alpha} \Phi_{,\beta} + V(\Phi) \right]$$

tensore energia-momento per un campo scalare in Relatività Generale

$$\frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu}.$$

Di solito in cosmologie si può scrivere:

(10)

$$\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x}, t),$$

dove $\varphi_0(t)$ è il valore classico del campo ($\equiv$ il valore di aspettazione nello stato iniziale omogeneo ed isotropo), mentre $\delta\varphi(\vec{x}, t)$ rappresenta le fluttuazioni quantistiche attorno a $\varphi_0(t)$ -
(ovvero la variazione di φ è la differenza tra il campo reale e il suo valor medio nel vuoto $\varphi_0(t) \equiv \langle \varphi(\vec{x}, t) \rangle \Rightarrow \langle \delta\varphi(\vec{x}, t) \rangle = 0$)

Questa separazione è utile perché le fluttuazioni quantistiche sono durante l'inflazione più piccole della dinamica, della evoluzione classica $\langle \delta\varphi^2 \rangle \ll \varphi_0^2(t)$ -

Quindi per il momento occupiamoci della evoluzione del campo classico $\varphi_0(t)$ (indichiamo $\varphi(t)$ d'ora in avanti) -

Se il campo è omogeneo ed isotropo, cioè dipende solo dal tempo le uniche componenti $\neq 0$ del tensore energia-momento sono:

$$T^0_0 = -\left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) \equiv -\rho_\varphi$$

(con signature $(-, +, +, +)$)

$$T^i_j = \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi)\right) \delta^i_j \equiv p_\varphi \delta^i_j$$

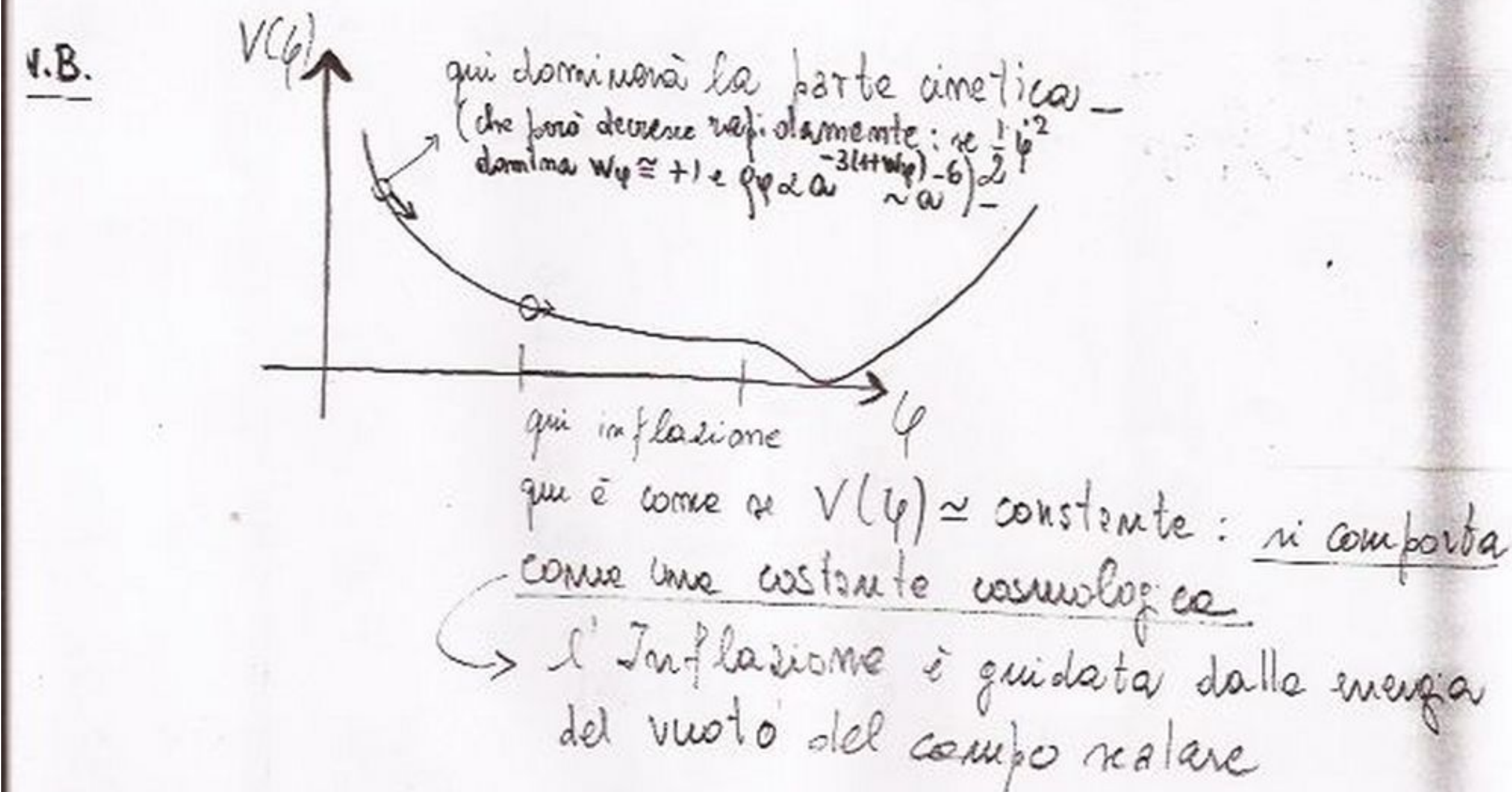
N.B. i) un campo omogeneo ed isotropo si comporta come un fluido perfetto

iii) la cosa importante è che in p c'è $-V(\phi)$: è il potenziale che è
 un possibile candidato a dare una $p < 0$ (11)

Quindi: se $V(\phi) \gg \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$

allora $p \approx -\rho \rightarrow$ universo di de-Sitter.

Se l'universo è dominato da un campo scalare, e la energia potenziale domina quella cinetica si può avere inflazione.



1.B: $\rho \propto a^{-4} e^{Ht}$ e la materia ordinaria (barioni o radiazione/fotoni)

$$\rho_r \propto a^{-4}$$

$$\rho_b \propto a^{-3}$$

va a zero rapidamente: non spesso comincia a
 dominare V , viene spazzato via tutto - tranne V stesso -
 (no-hair cosmological theorem)

una cosa analoga dicasi per la curvatura spaziale k
 (e per la stessa ragione anche qualsiasi disomogeneità viene cancellata
 non appena l'inflazione inizia, giustificando così l'uso della metrica di background di FRW)

Vediamo più in dettaglio la dinamica inflazionaria:

(12)

Dalla equazione di Klein-Gordon per un campo omogeneo ed isotropo si ha (oppure dalla conservazione del tensore energia-momento)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad V(\phi) = \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Nota il termine di frizione dovuto all'espansione dell'universo.

Inoltre dalle equazioni di Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right)$$

Se richiediamo che $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ il campo scalare sta rotolando lentamente lungo il suo potenziale $\Rightarrow$ periodo di **SLOW-ROLL**

(lento-rotolamento)

Questa condizione $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ è ottenuta se il potenziale è sufficientemente piatto $\Rightarrow$ ci possiamo aspettare che V e le sue derivate rispetto a ϕ varino lentamente con $\phi \Rightarrow$ ci aspettiamo che $\ddot{\phi}$ sia trascurabile

Allora $\begin{cases} H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi) & (1) \\ 3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi) & (2) \end{cases}$

$\rightarrow$ E' come condizione una eq. $\ddot{x} + 3\Gamma\dot{x} = -\frac{F}{m}$ (eq. con attrito)
 per $t > \frac{1}{\Gamma}$, $\ddot{x} \approx -\frac{F}{3m\Gamma}$, cioè F determina $\ddot{x}$ e non porta la accelerazione che diventa sotto-dominante.

Condizioni di slow-roll (usando la (2))

1. $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \ll H^2$ (o anche $\frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1$ usando la (1))
2. $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \Rightarrow V'' \ll H^2$ (o anche $\frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''}{V} \right) \ll 1$)

I.N.F.N. Sezione di PADOVA

bartolo@lcpd05

Job 885

/tmp/img-pos629900

1^a condizione

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi)$$

$$9H^2\dot{\varphi}^2 = (V')^2$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{(V')^2}{9H^2}$$

quindi:

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \ll H^2$$

2^a condizione

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi)$$

$$3H\ddot{\varphi} \approx -V''(\varphi)\dot{\varphi}$$

quindi:

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{V''\dot{\varphi}}{3H} \ll 3H\dot{\varphi}$$

$$\text{ovvero } V'' \ll 9H^2$$

Pertanto è conveniente introdurre i cosiddetti
parametri di slow-roll :

(13)

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$\eta = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''}{V} \right) = \frac{1}{3} \frac{V''}{H^2}$$

Posiamo quindi anche dire che per avere un periodo di
inflazione $\epsilon, |\eta| \ll 1$ (cioè il potenziale deve essere
sufficientemente piatto affinché si sviluppi l'inflazione
X Accanto a gerarchia di parametri di slow-roll.

ex: $\xi^2 = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V'V'''}{V^2} \right)$

X Accanto al fatto che $\epsilon, \eta \approx \text{cost.}$ durante l'inflazione xè, potenziale

Nota che abbiamo tutto ϵ anche come $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$: ϵ
quantifica di quanto il parametro di Hubble
cambia nel tempo durante l'inflazione.

In particolare :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1-\epsilon)H^2,$$

quindi l'inflazione si può ottenere solo se $\epsilon < 1$ -

Non appena questa condizione
l'inflazione finisce

cena

Two simple but very important examples

“Large field” like potential

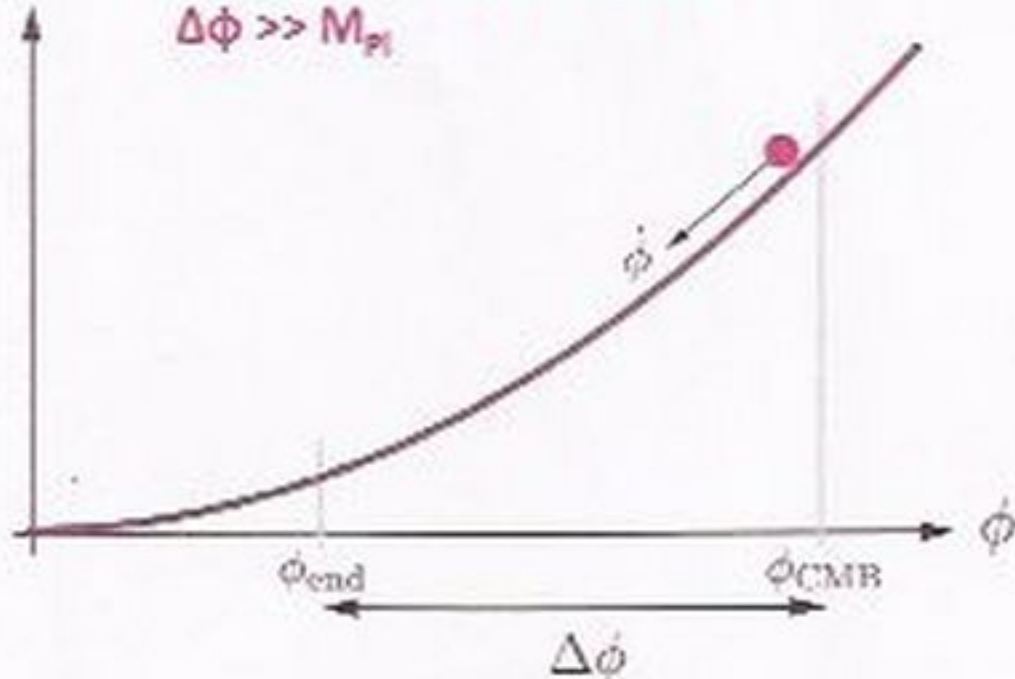
$$V(\phi) \propto \phi^\alpha$$

$$\epsilon \sim \frac{1}{\pi G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \sim \alpha^2 \frac{1}{\pi G} \frac{1}{\phi^2} \sim \alpha^2 \frac{M_{\text{Pl}}^2}{\phi^2}$$

$$\epsilon \ll 1 \Rightarrow \phi \gg M_{\text{Pl}}$$

$$M_{\text{Pl}} = (\hbar c/G)^{1/2} \equiv G^{-1/2} \simeq 10^{19} \text{ GeV}$$

$V(\phi)$ **LARGE FIELD EXCURSION**
 $\Delta\phi \gg M_{\text{Pl}}$



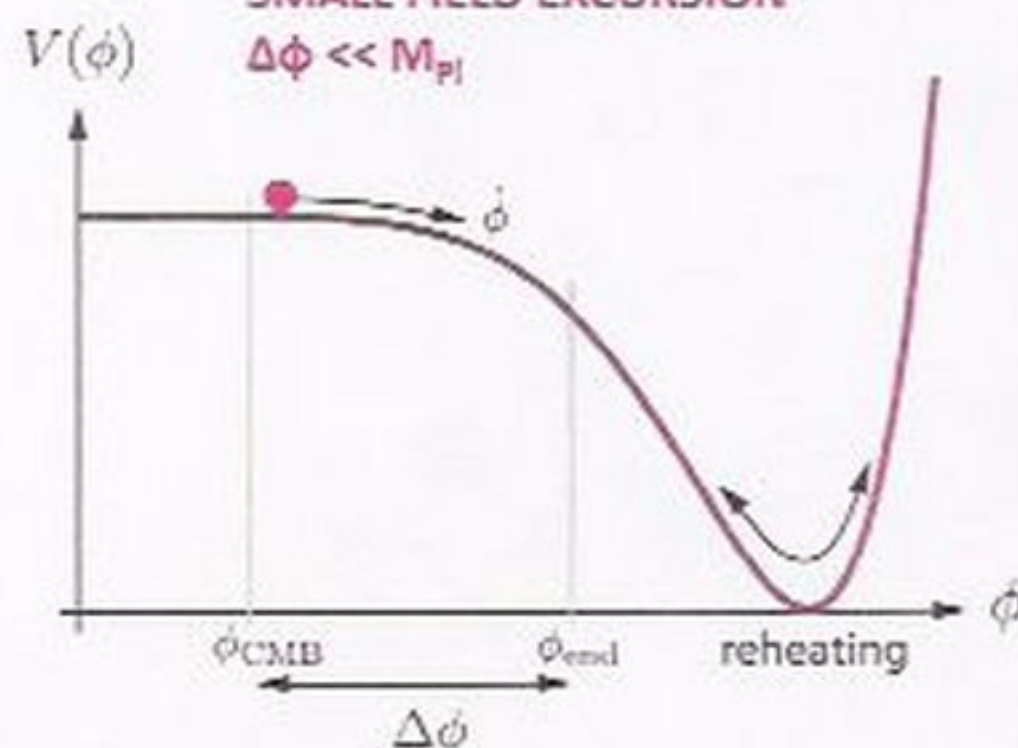
“Small field” like potential

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right] \quad \phi < \mu < M_{\text{Pl}}$$

$$\epsilon \sim p^2 \frac{\phi^{2p}}{\mu^{2p}} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{\phi^2} \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right]^{-1}$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \text{ for } \phi \rightarrow 0$$

SMALL FIELD EXCURSION
 $\Delta\phi \ll M_{\text{Pl}}$



Escursione del campo:

$$\Delta\phi = \int_{\phi_{\text{CMB}}}^{\phi_{\text{end}}} d\phi = \int_{t_{\text{CMB}}}^{t_{\text{end}}} \dot{\phi} dt \simeq \frac{\dot{\phi}}{H} \int_{Ht_{\text{CMB}}}^{Ht_{\text{end}}} d(Ht) = \frac{\dot{\phi}}{H} N_{\text{CMB}} \epsilon^{1/2} N_{\text{CMB}} M_{\text{Pl}}$$

Quindi nel caso di $\epsilon \sim 1/N_{\text{CMB}}$ (come di solito succede nei modelli a grande campo) e non troppo piccoli, la escursione del campo è $\Delta\phi > M_{\text{Pl}} \rightarrow$ modelli a campo grande. (qui N_{CMB} definisce la “finestra osservabile” durante l’inflazione, quella che noi possiamo sondare osservativamente, ovvero N_{CMB} corrisponde ai 60-70 e-folds (contati a partire dalla fine dell’inflazione) in corrispondenza dei quali la scala osservabile più grande, ovvero l’orizzonte cosmologico oggi, esce dall’orizzonte durante l’inflazione; -- ripensate sempre al grafico dell’orizzonte cosmologico in funzione del tempo--. Le scale cosmologiche più grandi possono essere sondate attraverso la CMB, da cui il pedice “CMB”).

Invece nel caso in cui $\epsilon \ll 1$ allora si avrà $\Delta\phi < M_{\text{Pl}} \rightarrow$ modelli a campo piccolo.