Argomento generale per vedere che ci aspettiamo fluttuazioni quantistiche dell'inflatone:

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} = -V''(\varphi)\,\delta\varphi$$

$$\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 = -V'(\varphi_0)$$

avendo usato $\varphi(\vec{x},t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x},t)$

Derivo la seconda eq. rispetto al tempo:

$$(\dot{\varphi}_0)^{\cdot\cdot} + 3H(\dot{\varphi}_0)^{\cdot} = -V''\dot{\varphi} \qquad (H = \text{cost})$$

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} = -V''\delta\varphi$$

trascurabile nel limite $\frac{k^2}{a^2} \ll 1$

$\Rightarrow$ $\dot{\varphi}_0$ e $\delta\varphi$ obbediscono alla stessa equazione

Guardo il wronskiano $W(x,y) = \dot{x}y - \dot{y}x$

Se $W \neq 0$ sono indipendenti;

$$W(\dot{\varphi}, \delta\varphi) = \ddot{\varphi}\delta\varphi - \dot{\varphi}\dot{\delta\varphi}$$

$\dot{W} = -3HW \Rightarrow W \propto e^{-3Ht} \rightarrow 0$. Quindi dopo un po' le 2 soluzioni saranno legate da una costante di proporzionalità

$$\delta\varphi(\vec{x},t) \sim -\delta t(\vec{x})\,\dot{\varphi}_0(t)$$

dipende da $\vec{x}$ perché ho buttato via il gradiente

$$\Rightarrow \varphi(\vec{x},t) = \varphi_0\left(t - \delta t(\vec{x})\right)$$

quindi il campo scalare a seconda del posto acquisisce lo stesso valore a tempi diversi (o a un certo t non ha lo stesso valore ovunque). E' il risultato delle fluttuazioni quantistiche.

2. PERTURBAZIONI COSMOLOGICHE dall' INFLAZIONE (1)

da fluttuazioni quantistiche del campo $\delta\varphi(\vec{x},t)$

Abbiamo visto 2 equazioni:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} = -V'(\varphi) \quad (1)$$

$\dot{} \equiv \frac{\partial}{\partial t}$

$$\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 = -V'(\varphi_0) \quad (2)$$

$$\varphi(\vec{x},t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x},t) \Rightarrow$$

Inserendo nella (1):

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\delta\varphi}{a^2} = -V''\delta\varphi \quad \text{(per piccole perturbazioni)}$$

$\delta\varphi$ è la fluttuazione quantistica.

N.B.: siamo in lento rotolamento $V'' \ll H^2$ (o se il campo ha massa $= 0$)

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} = 0$$

Risolvo l'equazione andando in Fourier space (NB: trasformata 3-dim xè ho dei termini che dipendono dal tempo):

$$\delta\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \tilde{\delta\varphi}(\vec{k},t)$$

onde piane poichè in spazio-piatto.

$$\tilde{\delta\varphi}^*(\vec{k},t) = \tilde{\delta\varphi}(-\vec{k},t)$$

L'equazione diventa:

$$\delta\ddot{\varphi}_{\vec{k}} + 3H\delta\dot{\varphi}_{\vec{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\varphi_{\vec{k}} = 0$$

Prima dei dettagli andamento qualitativo:

1) $\lambda \ll H^{-1} \to k \gg aH$

H^{-1}: raggio di Hubble

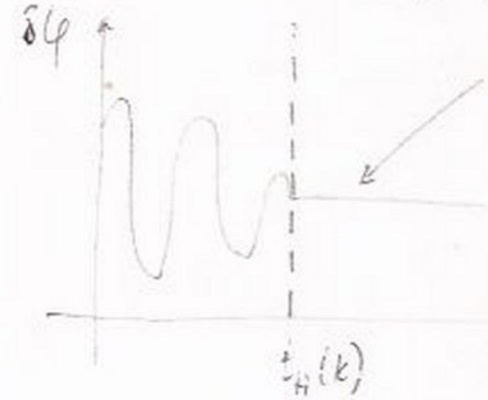
$$\Rightarrow \quad \ddot{\delta\varphi} + \frac{k^2}{a^2}\delta\varphi = 0$$

$\delta\varphi$ oscilla (ce lo si doveva aspettare: è come andare a ridursi ad uno spazio piatto se prendo scale molto piccole)

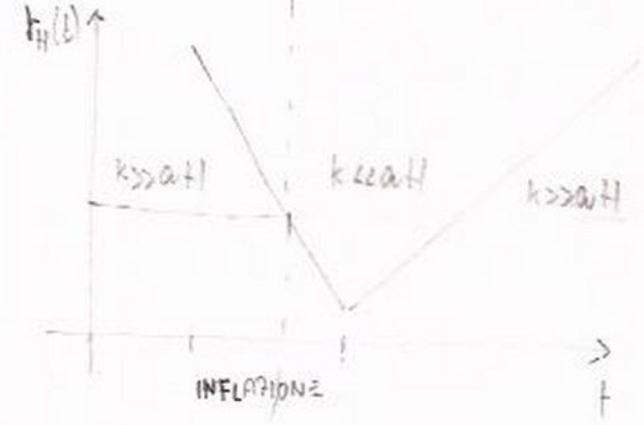
2) $\lambda \gg H^{-1} \to k \ll aH$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} = 0$$

$\delta\varphi \simeq$ cost. su scale più grandi dell'orizzonte.



la fluttuazione è congelata sopra l'orizzonte (la fluttuazione non si propaga più e la sua ampiezza è congelata a causa di $3H\dot{\delta\varphi}$. la sua λ_{phys} va a e^{Ht}. Se medio su tempi grandi $\delta\varphi \neq 0$: il risultato finale è uno stato con un numero netto di particelle. In pratica è un meccanismo di amplificazione gravitazionale il cui punto cruciale è il fatto che H = cost e i modi prima dentro l'orizzonte sono "stirati" fuori da esso) –



Se l’equazione fosse classica avrei due costanti di inegrazione; stiamo pero` parlando di fluttuazioni quantistiche —> diventano operatori di creazione e distruzione (seconda quantizzazione).

Consideriamo $\hat{\delta\varphi} = a\,\delta\varphi$ funzione armonica del tempo

$$\hat{\delta\varphi}(\tau,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[u_k(\tau)\,a_{\vec{k}}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + u_k^*(\tau)\,a^\dagger_{\vec{k}}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right]$$

dove a_k e $a_k^\dagger$ sono operatori di creazione e distruzione.

$a_k|0\rangle = 0$

$\langle 0|a^\dagger_{\vec{k}} = 0$;

obbediscono alle regole di commutazione: $[a^\dagger_{\vec{k}'}, a_{\vec{k}}] = -\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$,

e u_k sono normalizzati secondo: $u_k^* u_k' - u_k u_k^{*\prime} = -i$, $\quad ' \equiv \frac{\partial}{\partial\tau}$

Nello spazio piatto avrei $u_k(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega_k}}$ (a piccole distanze, per il principio di equivalenza, devo poter riprodurre la metrica piatta che in mecc. quantistica mi porta a delle onde piane)

Nello spazio curvo le $u_k(\tau)$ ~~si~~ obbediscono alla:

$$\boxed{u_k''(\tau) + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + V''a^2\right)u_k = 0}$$

dove $' \equiv \frac{\partial}{\partial\tau}$, con τ tempo conforme $\left(d\tau = \frac{dt}{a}\right)$

1) caso $m=0$, e espansione di de Sitter ($a \propto e^{Ht}$, $H=$ const.)

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)u_k = 0$$

$\rightarrow d\tau = \frac{dt}{a} = dt\, e^{-Ht} \rightarrow \tau = -\frac{1}{H} e^{-Ht} = -\frac{1}{aH}$ ($\tau<0$, scegliendo opportunamente le costanti di integrazione)

e $\frac{a''}{a}$ (de Sitter) $= \frac{2}{\tau^2} = 2a^2H^2$ e $(aH)^{-1}$ raggio di Hubble

quindi per scale sotto l'orizzonte $k^2 \gg \frac{a''}{a}$ e

$$u_k'' + k^2 u_k = 0 \rightarrow u_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (k \gg aH)$$

Su scale sopra l'orizzonte:

$$u_k'' - \frac{a''}{a} u_k = 0 \rightarrow (\text{modo crescente})\ u_k = B(k)a(\tau) \quad (k \ll aH$$

con $B(k)$ costante di integrazione.

Faccio una approssimazione per trovare $|B(k)|$: un "matching" tra i 2 regimi quando la scala k attraversa l'orizzonte a $k=aH$ $(-k\tau = 1)$

$$|B(k)|a = \frac{1}{\sqrt{2k}} \Rightarrow |B(k)| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$$

Ritorno alla variabile $\delta\varphi$:

$$\boxed{|\delta\varphi_k| \simeq |B(k)| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}}}$$

per i modi sopra l'orizzonte $(k \ll aH)$

4bis

N.B : Se sono in quasi de-Sitter

$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \neq 0$ e allora la scala attraversa l'orizzonte quando

$k = a_k H_k$

$H_k = H(t_H(k))$

istante al quale la scala k attraversa l'orizzonte durante l'inflazione $\Rightarrow$

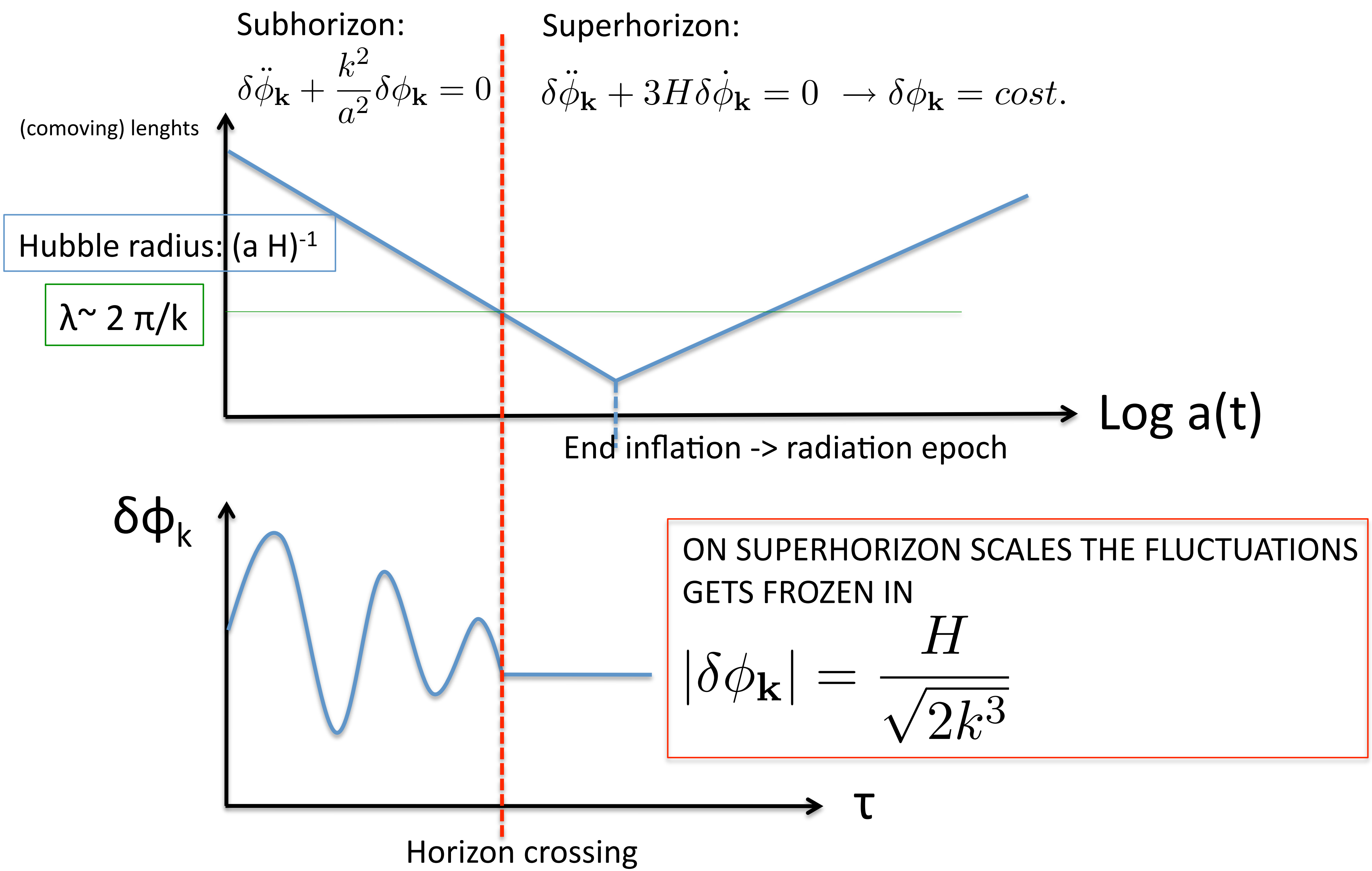
otteniamo $|\delta\varphi_k| \simeq \frac{H(t_H(k))}{\sqrt{2k^3}}$

N.B : soluzione esatta!

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}\left(1 - \frac{i}{k\tau}\right)$$

$k\tau \gg 1$: $u_k(\tau) \sim \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}$

$|k\tau| \ll 1$: $|u_k(\tau)| \sim \frac{1}{\sqrt{2k^3}} H a(\tau) \rightarrow |\delta\varphi_k| \sim \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$


Subhorizon:
$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_{\mathbf{k}} = 0$
Superhorizon:
$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\delta\dot{\phi}_{\mathbf{k}} = 0 \;\rightarrow\; \delta\phi_{\mathbf{k}} = cost.$
(comoving) lenghts
Hubble radius: $(a\,H)^{-1}$
$\lambda \sim 2\,\pi/k$
Log a(t)
End inflation -> radiation epoch
$\delta\phi_k$
ON SUPERHORIZON SCALES THE FLUCTUATIONS GETS FROZEN IN
$|\delta\phi_{\mathbf{k}}| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$
τ
Horizon crossing

So what's going on?

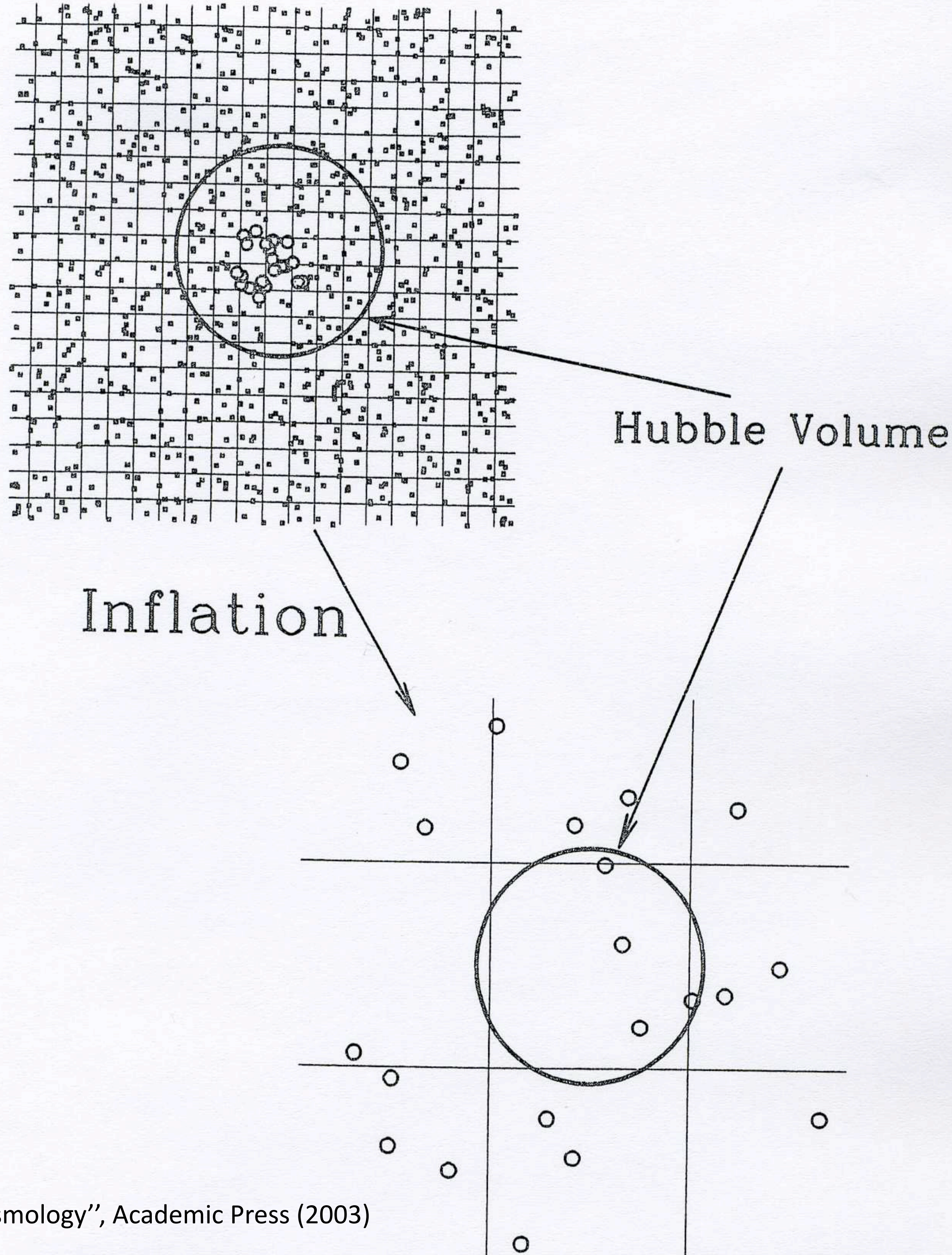
On microscopic scales (well inside the horizon) microphysics is at work: use quantum field theory. There are quantum fluctuations of the scalar field; if averaged over macroscopic interval of time they vanish (quantum fluctuations of vacuum: particles are continuosly created and destroyed).

However the space-time background is exponentially inflating so their physical wavelengths grow exponentially

$$\lambda_{phys} \propto a(t) \propto e^{Ht}$$

until they become greater then the horizon H^{-1} (which remains almost constant). On super-horizon scales the fluctuations get frozen (because of the friction term $3H\delta\dot{\phi}$). The fluctuations do not vanish if averaged on macroscopic time interval: a classical fluctuation has been generated.

Said in other words: if on superhorion scales $\delta\phi \neq 0$ over macroscopic time interval then the final result is a state with a net number of particles. This is a gravitational mechanism of amplification. The crucial point is the "in" and "out" (of the horizon) state of the fluctuations



From S. Dodelson ``Modern Cosmology'', Academic Press (2003)

Vediamo come ottenere una soluzione valida ad ogni τ, che riproduca i due regimi estremi, $k \ll aH$ e $k \gg aH$, considerati finora.

Campo scalare con massa trascurabile in quasi-de Sitter:

$\dot{H} = -\epsilon H^2 \quad , \quad \epsilon \ll 1$

In questo caso i) $a(\tau) \simeq -\dfrac{1}{H\tau(1-\epsilon)}$

ii) $\dfrac{\ddot{a}}{a} = H^2(1-\epsilon) \rightarrow \dfrac{a''}{a} \simeq \dfrac{2}{\tau^2}\left(1+\dfrac{3}{2}\epsilon\right)$

i) e ii) ottenuti facendo uno sviluppo all'ordine più basso in ϵ

l'equazione per la u_k diventa:

$$u''_k + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)u_k = 0 \longrightarrow \boxed{u''_k + \left(k^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2}\right)u_k = 0 \qquad \nu^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon}$$

N.B: posso trattare ϵ come costante perché rispondendo all'ordine più basso in ϵ si ha che $\dot{\epsilon} \sim O(\epsilon^2)$.

Ho così una eq. di Bessel la cui soluzione è:

$$u_k(\tau) = \sqrt{-\tau}\left[c_1(k)H_\nu^{(1)}(-k\tau) + c_2(k)H_\nu^{(2)}(-k\tau)\right]$$

Siccome $H_\nu^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad \left(H_\nu^{(2)} = H_\nu^{(1)*}\right)$

$\Rightarrow c_2(k) = 0 \ , \ c_1(k) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}$ per avere l'andamento oscillatorio su frontale reale $\propto e^{-ik\tau}$

$$\Rightarrow \quad u_k(\tau) = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}_{c_1(k)} \sqrt{-\tau}\, H_\nu^{(1)}(-k\tau)$$

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{ix}, & x \gg 1 \\ H_\nu^{(1)}(x) \sim x^{-\nu}, & x \ll 1 \end{cases}$$

Per i modi fuori dall'orizzonte:

$$H_\nu^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\, 2^{\nu-\frac{3}{2}} \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right) x^{-\nu} \Rightarrow$$

$$u_k(\tau) \underset{k\tau \ll 1}{\simeq} e^{i\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}\, 2^{\left(\nu-\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (-k\tau)^{\frac{1}{2}-\nu} \times \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

e

$$|\delta\varphi_k| \simeq 2^{\left(\nu-\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu} \qquad \underline{\underline{(k \ll aH)}}$$

Siccome $\epsilon \ll 1$ e $\nu^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon$ posso sviluppare in $\epsilon \Rightarrow$

$$\boxed{|\delta\varphi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{3}{2}-\nu}, \quad \frac{3}{2} - \nu = -\epsilon \ \left(o\ \frac{3}{2} - \nu = \eta - \epsilon \text{ se includo la massa}\right)}$$

N.B.: Posso scrivere $H \simeq H_k \left[1 + \frac{\dot{H}}{H^2}\Big|_{k=aH} \ln\left(\frac{aH}{k}\right)\right] \simeq H_k \left(\frac{k}{aH}\right)^{\epsilon}$

$$\Rightarrow \boxed{|\delta\varphi_k| \simeq \frac{H_k}{\sqrt{2k^3}}}$$ (risultato che avevamo anticipato)

Commento: Se volessi tenere conto di una massa del campo scalare, piccola, ma non nulla

$m^2 = V'' \ll H^2$

$$u''_k + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + m^2 a^2\right) u_k = 0 \rightarrow$$ ho ancora l'equazione di Bessel con adesso

$$\boxed{\nu^2 = \frac{9}{4} + 3\varepsilon - 3\eta}$$

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{m^2}{H^2}$$

e riprendo tutte le espressioni precedenti con questa nuova espressione di $\nu \simeq \frac{3}{2} + \varepsilon - \eta$ (all'ordine più basso in ε e η) -

o $\frac{3}{2} - \nu = \eta - \varepsilon$

Una perturbazione di $\delta\varphi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu}$, una perturbazione nel tensore energia momento e a sua volta, attraverso le eq. di Einstein $\delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta(R g_{\mu\nu})$ e quindi $\delta g_{\mu\nu}$ -

A sua volta $\delta g_{\mu\nu}$ entrerà nella eq. di Klein-Gordon come perturbazione della metrica -

Quindi $\delta\varphi \Leftrightarrow \delta g_{\mu\nu}$, le fluttuazioni di φ sono strettamente legate a $\delta g_{\mu\nu}$ (anche per questioni di gauge-invarianza) -

Infatti in termini della quantità gauge-invariante

$$Q_\varphi = \delta\varphi + \frac{\dot\varphi}{H}\psi \quad \text{(variabile di Sasaki-Mukhanov)}$$

si ottengono delle eq. del tipo:

$$\hat{Q}''_{\varphi} + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + M^2 a^2\right)\hat{Q}_\varphi = 0$$

con $\frac{M^2}{H^2} = 3\eta - 6\epsilon$ e risolvibile come al solito come una eq. di Bessel con $\nu \simeq \frac{3}{2} + 3\epsilon - \eta$ $\left(\nu^2 = \frac{9}{4} + 9\epsilon - 3\eta\right)$

si può riutilizzare le soluzioni viste prima -

Siccome $\zeta \simeq -\psi - \delta\varphi\frac{H}{\dot\varphi}$ uno poi arriva allo spettro

$$= -\frac{H}{\dot\varphi}Q_\varphi \qquad \Delta(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot\varphi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}$$

e quindi ad un indice spettrale per le perturbazioni scalari:

$$n-1 = \frac{d\ln\Delta}{d\ln k} = 3-2\nu = 2\eta - 6\varepsilon$$

(si vedano anche note più avanti).

Abbiamo visto che se abbiamo un campo scalare senza massa o molto leggero, le sue fluttuazioni vengono "eccitate" in de-Sitter su scale più grandi del raggio di Hubble. Una cosa analoga può succedere per altri campi senza massa o molto leggeri.

Un esempio importante sono le onde gravitazionali

$$g_{ij} = a^2 (\delta_{ij} + h_{ij})$$

con $h^i{}_i = 0$, $h^i{}_{j;i} = 0$;

$$h_{ij} = h_{ji}$$

Le onde gravitazionali hanno 2 gradi di libertà che si propagano come due campi scalari minimamente accoppiati $\phi_{+,\times}$

con $h_{+,\times} = \sqrt{32\pi G}\ \phi_{+,\times}$

$$\Delta_{h_{+,\times}}(k) = 32\pi G\, \Delta_{\phi_{+,\times}}(k) = \frac{32\pi}{M_{Pl}^2} \frac{H_*^2}{4\pi^2} = \frac{8}{\pi} \frac{H_*^2}{M_{Pl}^2} = \frac{8}{\pi} \frac{H^2}{M_{Pl}^2} \left(\frac{k}{aH}\right)^{-2\varepsilon}$$

$M_{Pl}^2 = G^{-1}$; $*$ indica il tempo al quale la scala k attraversa l'orizzonte durante l'inflazione

N.B.: siccome $\dfrac{H_*^2}{M_{Pl}^2} \propto \rho_{inflatone} \cong V(\varphi)$ l'ampiezza delle onde gravitazionali è $\propto$ alla scala di energia a cui avviene l'inflazione.

L'indice spettrale è $n_T = \dfrac{d \ln \Delta_h(k)}{d \ln k} = -2\varepsilon$.