VETTORI: DEFINIZIONI

Se ad una grandezza fisica G si associa una direzione ed un verso si parla di vettori: $\vec{G}$ $(o\,\mathbf{G})$

✔ Le grandezze fisiche possono essere di due tipi:

SCALARE: numero con le sue unita` di misura (es: la temperatura, l'energia etc.)

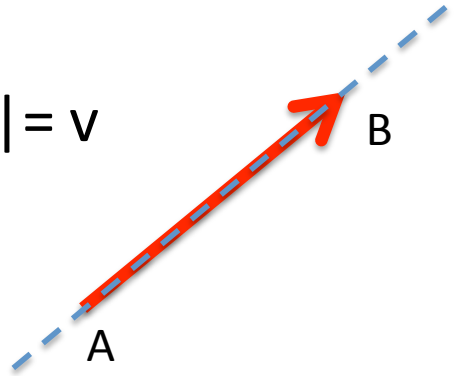
VETTORIALE: grandezza matematica definita da una **direzione**, un **verso** e da un **modulo** (o intensita`)

Esempio: vettore spostamento, vettore velocita`, vettore accelerazione;
le forze sono grandezze fisiche vettoriali.

✔ Graficamente i vettori si indicano con dei segmenti orientati di rette (delle ``freccie''):

direzione: data da una retta
verso: uno dei due versi possibili lungo la retta
modulo: corrisponde alla lunghezza della freccia (in una unita` di misura opportuna)

vettore $\vec{v}$ di modulo $|\vec{v}| = v$

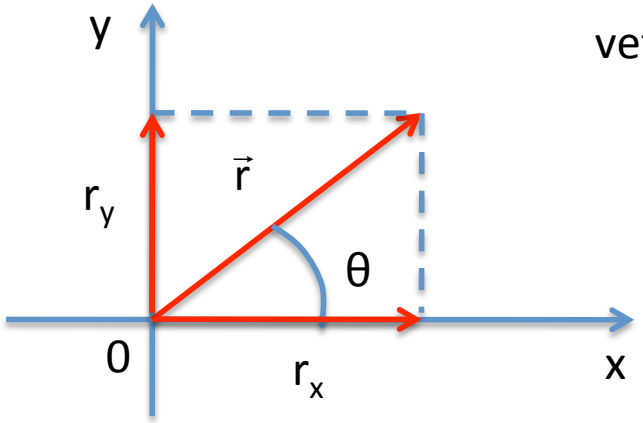


N.B.: il punto a cui si ``attacca'' l'origine (o ``coda'') del vettore si chiama punto di applicazione.
Attenzione che vettori che hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo rappresentano in realta` lo stesso vettore

Quindi si puo` liberamente traslare un vettore ed applicarlo a qualsiasi punto si voglia

COMPONENTI DEI VETTORI

Supponete di aver scelto un sistema di coordinate (o sistema di riferimento)



vettore $\vec{r}$ di modulo $|\vec{r}| = r$

Le componenti di un vettore sono le sue proiezioni sugli assi:

$$r_x = r\cos\theta$$

$$r_y = r\sin\theta$$

Scomposizione del vettore nelle sue componenti

COMPONENTI DEI VETTORI

Identificare il vettore con un modulo, una direzione ed un verso, oppure attraverso le sue componenti r_x ed r_y e` equivalente.

Infatti: dati r e θ, ottengo le sue componenti dalle formule precedenti;
viceversa date le sue componenti ottengo il modulo r e la direzione (data da θ se il vettore giace sul piano x-y) dalle formule:

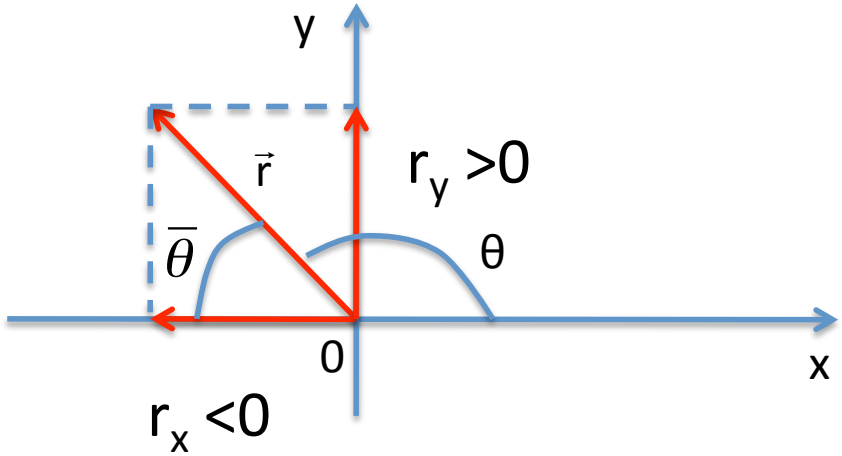
$$\begin{cases} r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \\ \text{tg}\theta = \dfrac{r_y}{r_x} \rightarrow \theta = \text{arct}\left(\dfrac{r_y}{r_x}\right) \quad \text{o } \theta = \arccos\left(\dfrac{r_x}{r}\right) \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere $\vec{r} \equiv (r_x, r_y)$ come una coppia ordinata di numeri

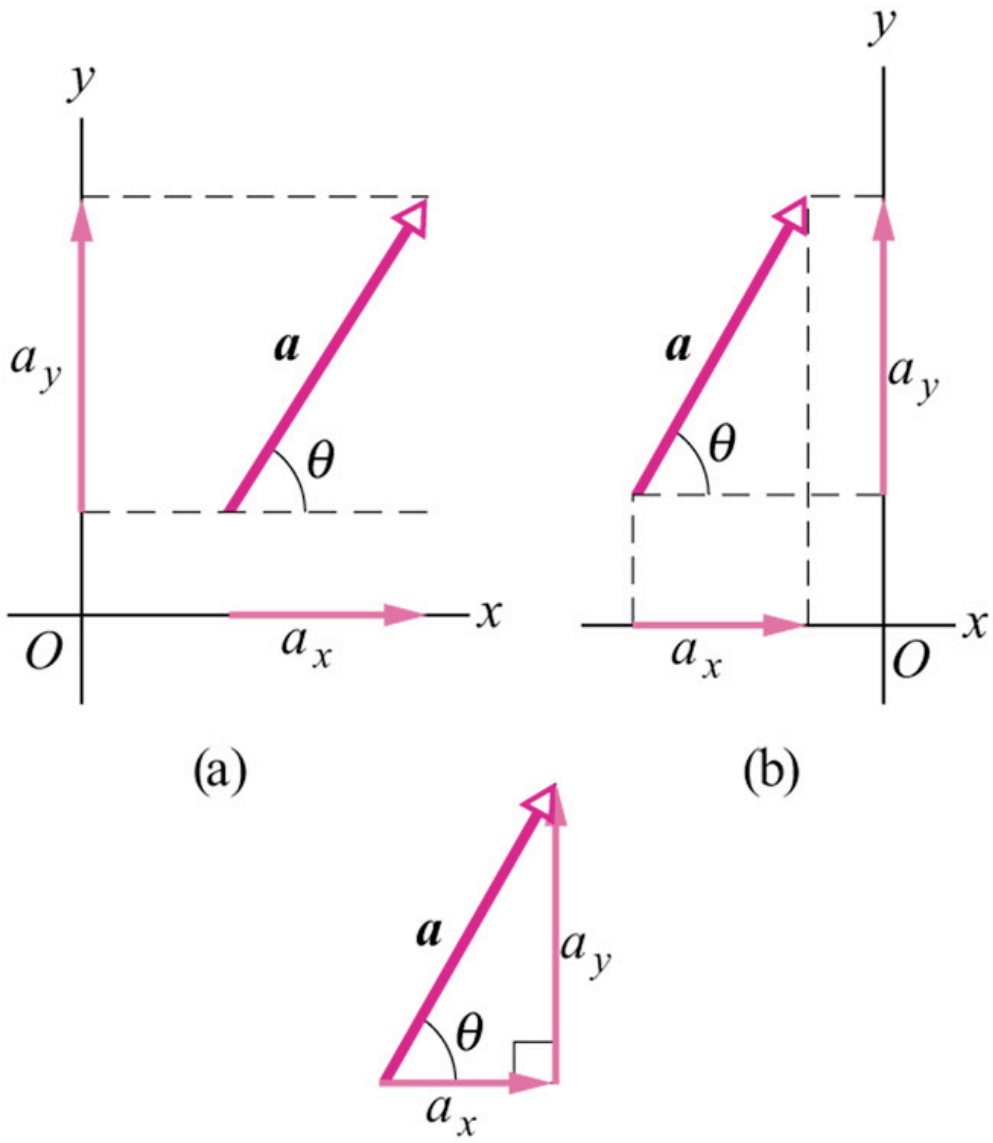
COMPONENTI DEI VETTORI

N.B.: r_x e r_y possono essere positivi o negativi.

Esempio:



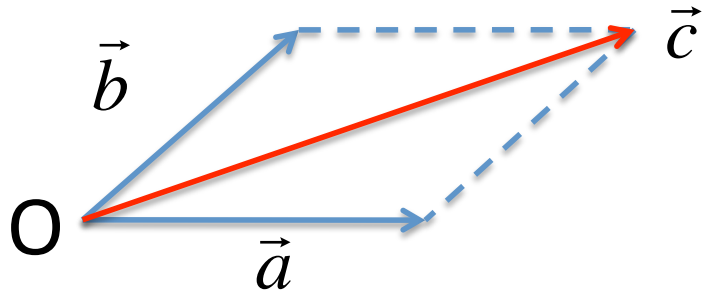
$$r_x = -\,r\cos\overline{\theta} = -\,r\cos(180 - \theta) = r\cos\theta < 0$$


y
a
a_y
θ
O
a_x
x
(a)
y
a
θ
a_y
a_x
O
x
(b)
a
a_y
θ
a_x
(c)

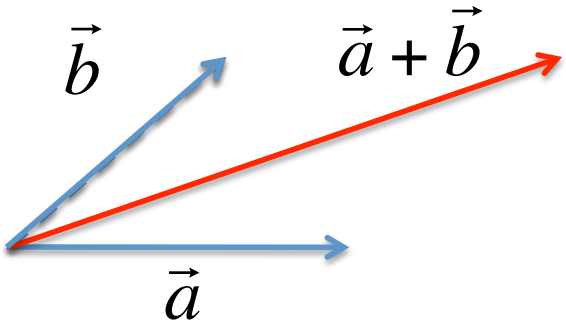
OPERAZIONI CON I VETTORI: SOMMA

La somma (o risultante) di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e` un vettore: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

✔ **<u>Metodo grafico del parellogramma</u>**: metto i vettori con l'origine nello stesso punto O e costruisco il parallelogramma che li ha come lati; la somma e' la diagonale che parte da O.

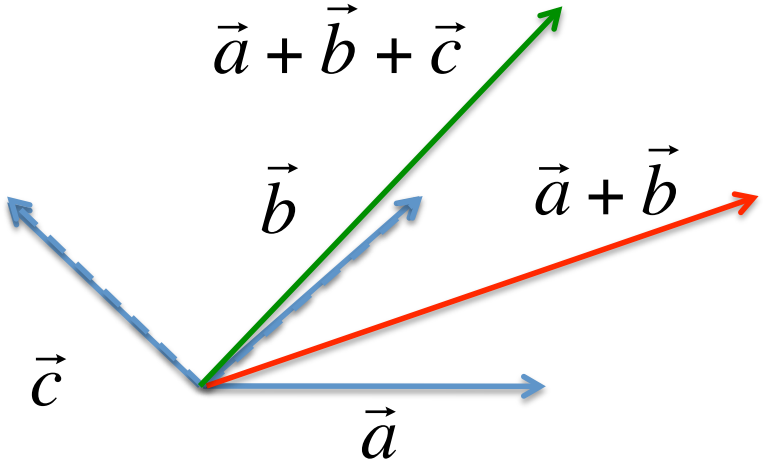


<u>Oppure</u>: metto il vettore $\vec{b}$ con l'origine (o``coda'') sulla punta di $\vec{a}$: la somma e` il vettore che congiunge l'origine di $\vec{a}$ con la punta di $\vec{b}$



SOMMA

✔ Se ho piu` vettori (per esempio tre): $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

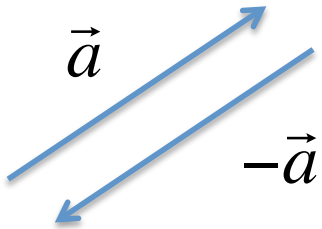


PROPRIETA` DELLA SOMMA

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (proprieta` commutativa).

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (proprieta` associativa)

3. Si definisce con $-\vec{a}$ (opposto di $\vec{a}$) un vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{a}$ ma **<u>verso opposto:</u>**



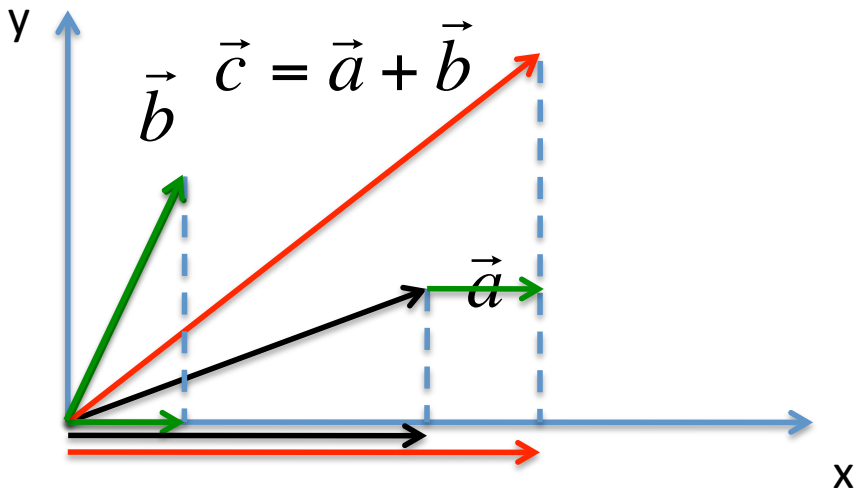
Allora si ha: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

SOMMA TRA VETTORI IN TERMINI DELLE COMPONENTI

Si consideri $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

In termini delle componenti risulta: $\vec{c} = (c_x, c_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y)$

ovvero si deono sommare le rispettive componenti dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



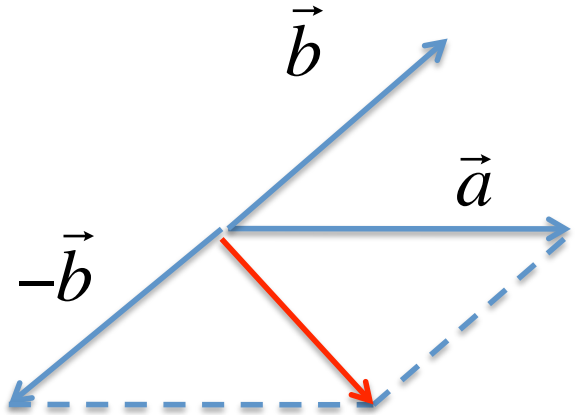
$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

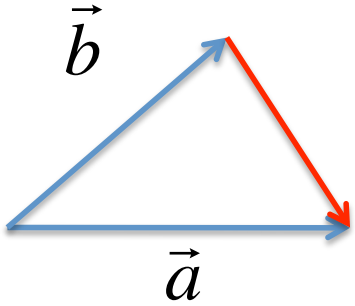
DIFFERENZA TRA VETTORI

La differenza tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e` un vettore:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + (-\vec{b})$$



Oppure, piu` semplicemente: dalla la punta di $\vec{b}$ alla punta di $\vec{a}$



DIFFERENZA TRA VETTORI IN TERMINI DELLE COMPONENTI

✔ Si consideri $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

In termini delle componenti risulta: $\vec{c} = (c_x, c_y) = (a_x - b_x, a_y - b_y)$

ovvero si fa la differenza tra le rispettive componenti dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

✔ N.B.1: Scrivere $\vec{c} = \vec{a}$ equivale a scrivere $(c_x, c_y) = (a_x, a_y)$

e quindi compenente per componente questo equivale a due equazioni

$$c_x = a_x, \quad c_y = a_y$$

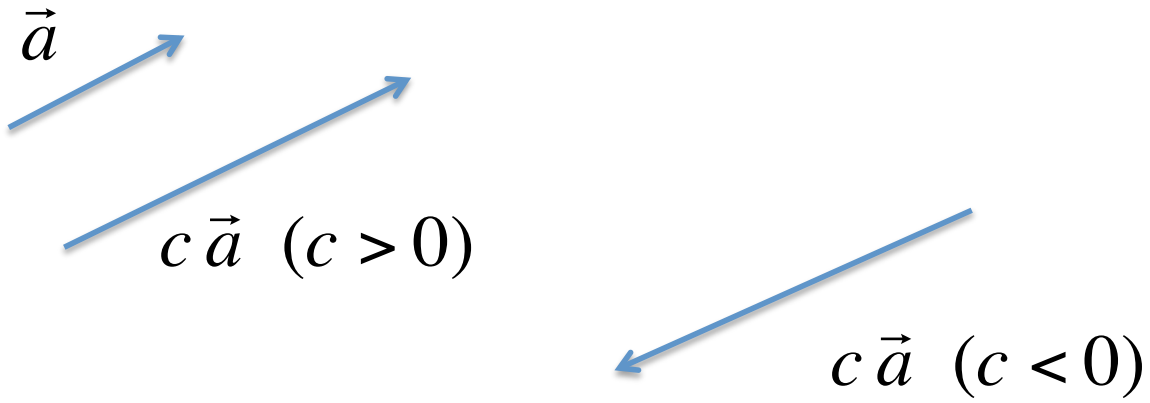
N.B.2: La espressione $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$ si puo` riscrivere come $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

PRODOTTO TRA UNO SCALARE ED UN VETTORE

Il prodotto di un vettore $\vec{a}$ per uno scalare (cioe` un numero) c, e` un vettore

$$c\vec{a}$$

1. Ha la stessa direzione di $\vec{a}$
2. modulo dato da: a×|c|
3. verso: uguale a quello di $\vec{a}$ se c>0, verso opposto a quello di $\vec{a}$ se c<0



PRODOTTO TRA UNO SCALARE ED UN VETTORE IN TERMINI DELLE COMPONENTI

$$c\,\vec{a} \equiv (c\,a_x, c\,a_y)$$

VETTORI UNITARI (O VERSORI)

✔ Dato un qualsiasi vettore $\vec{a}$ posso considerare il vettore: $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\hat{a}$ e` un vettore che ha **stessa direzione e verso di** $\vec{a}$ **e modulo pari ad uno** (ed e` senza dimensioni):

$$|\hat{a}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$

✔ Pertanto il vettore $\hat{a}$ viene anche chiamato il **versore** di $\vec{a}$, perche` ne indica semplicemente la direzione ed il verso. Possiamo infatti scrivere:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$$

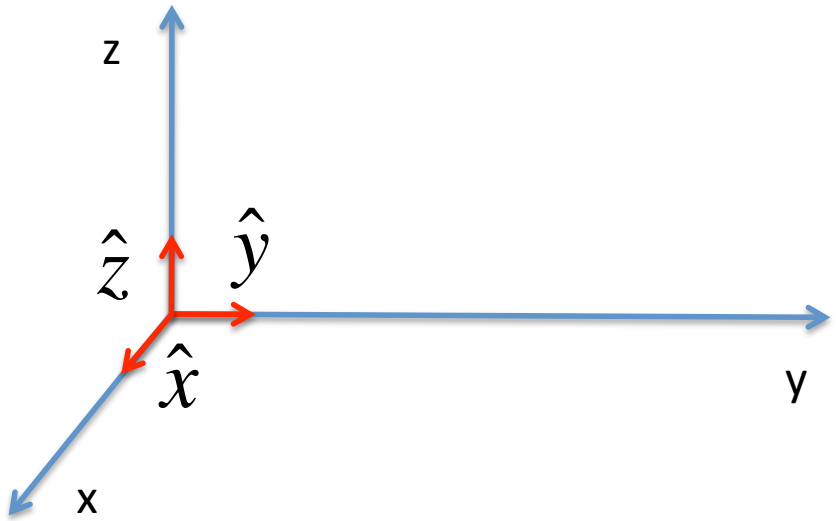
VETTORI UNITARI (O VERSORI)

Allora, dato il sistema di riferimento con assi coordinati x e y si possono individuare due versori, uno che punta verso l'asse positivo delle x e uno che punta verso l'asse positivo delle y:

$\hat{x}$ e $\hat{y}$ hanno modulo unitario e sono adimensionali

VETTORI UNITARI (O VERSORI)

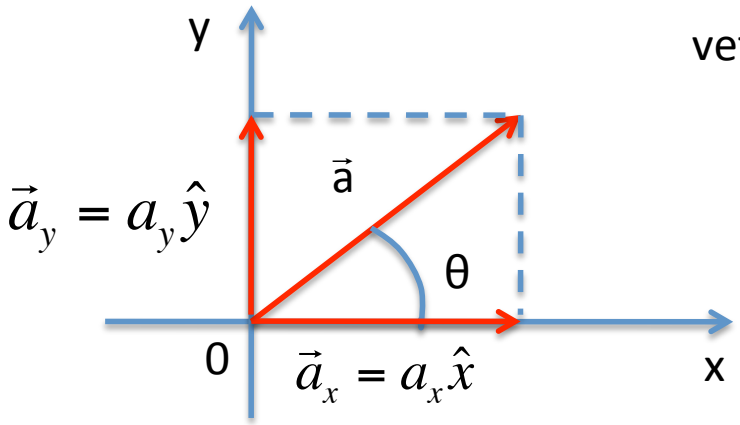
In modo analogo nelle 3 dimensioni spaziali



$\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ hanno modulo unitario e sono adimensionali

COMPONENTI VETTORIALI DEI VETTORI

Supponete di aver scelto un sistema di coordinate (o sistema di riferimento)



vettore $\vec{a}$ di modulo $|\vec{a}| = a$

Possiamo scivere il vettore $\vec{a}$ nel seguente modo:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = a_x \hat{x}$$

$$\vec{a}_y = a_y \hat{y}$$

Si sta proiettando $\vec{a}$ lungo gli assi x e y

COMPONENTI VETTORIALI DEI VETTORI

Allora per la somma (o la differenza) si potra` scivere:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y}) + (b_x \hat{x} + b_y \hat{y})$$

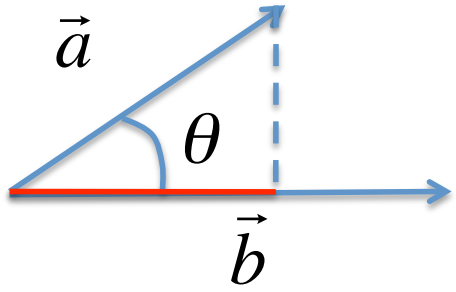
$$= (a_x + b_x)\hat{x} + (a_y + b_y)\hat{y}$$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si indica come **prodotto scalare** tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$\vec{a} \bullet \vec{b}$;

$\vec{a} \bullet \vec{b} = a\, b \cos\theta$, dove θ e` l'angolo compreso tra i due vettori ( e a e b sono I moduli dei deu vettori). **E` un numero**

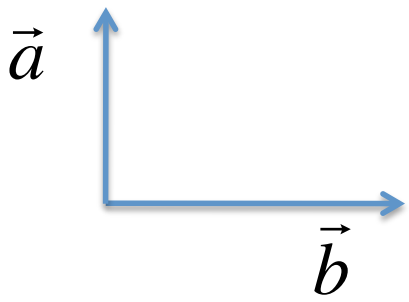


L'operazione di prodotto scalare equivale a proiettare $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

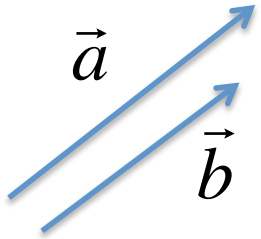
Infatti: casi particolari

1.



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a\, b \cos 90^\circ = 0$$

2.



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a b \cos 0^\circ = a\, b$$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI: PROPRIETA`

1. $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (proprieta` commutativa)

2. In termini delle componenti:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (a_x \ \hat{x} + a_y \ \hat{y}) \bullet (b_x \ \hat{x} + b_y \ \hat{y}) = a_x b_x + a_y b_y$$

3. In particolare $\vec{a} \bullet \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 = a^2$
corrisponde quindi al modulo al quadrato del vettore

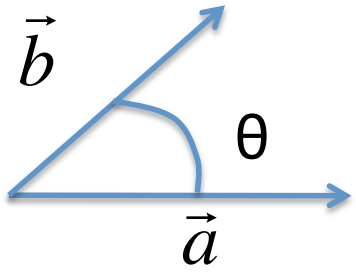
PRODOTTO VETTORIALE

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il prodotto vettoriale ***e` un vettore*** che si indica

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

ed e` cosi` definito:

- **modulo: c=a b sinθ**,dove θ e` l'angolo minore formato dai due vettori

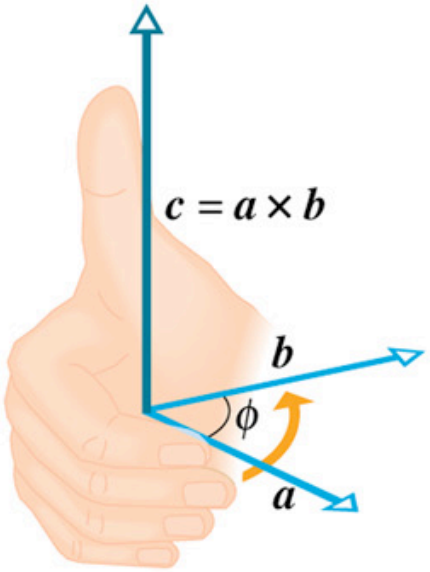


Il modulo rappresenta l'area del parallelogramma formato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

- direzione e verso:

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ e` un vettore ortogonale (cioe` perpendicolare) al piano individuato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

il verso si determina con la **``regola della mano destra''**



(a)

PROPRIETA` DEL PRODOTTO VETTORIALE

- ✓ Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli: θ=0 e sinθ=0, allora il prodotto vettoriale e` zero

  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$

- ✓ Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono ortogonali: θ=90°, sinθ=1 allora c=a b

- ✓ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

- ✓ $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$ (proprieta` distributiva)

- ✓ $s\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b})$ (prodotto per uno scalare)

PROPRIETA` DEL PRODOTTO VETTORIALE

✓ In termini delle componenti:

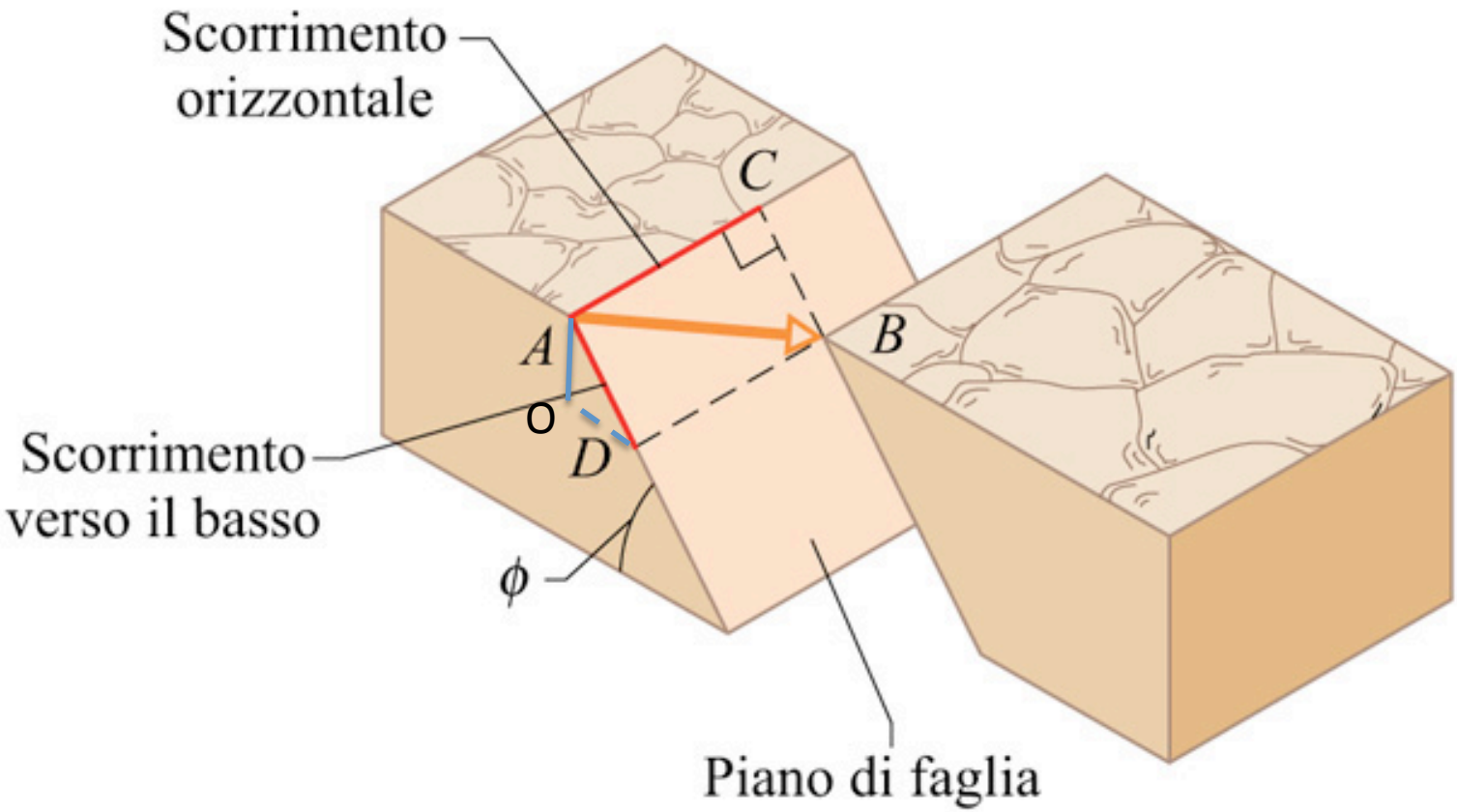
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) =$$

$$= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{x} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{y} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{z}$$

Es.:

$$a_x \hat{x} \times b_x \hat{x} = a_x b_x (\hat{x} \times \hat{x}) = 0$$

$$a_x \hat{x} \times b_y \hat{y} = a_x b_y (\hat{x} \times \vec{y}) = a_x b_y \hat{z}$$



Fondamenti di Fisica - 6° ed.
Copyright 2006 Casa Editrice Ambrosiana