sia indispensabile una normale circolazione degli strati d'aria per rimuovere l'inquinamento).

7.5 FLUIDI IN MOTO

Negli ultimi tre paragrafi è stata discussa la fisica dei fluidi in quiete. La dinamica dei fluidi, la fisica del moto dei fluidi, è molto più complicata ed una trattazione completa dell'argomento va oltre gli scopi di questo libro. È tuttavia di grande importanza per la comprensione di fenomeni diversi come il volo degli aerei, uccelli e insetti nell'aria, il flusso del sangue lungo i vasi del sistema circolatorio e la circolazione dell'aria nell'atmosfera. Anche se i principi che stanno alla base della dinamica dei fluidi continuano ad essere sempre le leggi del moto di Newton, le equazioni matematiche che descrivono in qual modo queste leggi governano il comportamento di un fluido in movimento, sono in generale molto complicate. In questo paragrafo considereremo alcuni aspetti semplici del moto fluido in relazione al moto lungo i condotti e li applicheremo alla circolazione del sangue lungo i vasi del sistema circolatorio.

Viscosità

Una sostanziale differenza tra fluido in moto e fluido in quiete è che un fluido in moto esercita una forza parallela ad una superficie, cosa che il fluido in quiete non fa (Proprietà 1 del fluido, Par. 7.2). Quando un fluido scorre aderente ad una superficie, esercita su di essa una forza $\mathbf{F}_{\parallel}$ parallela alla superficie nella direzione del moto. La reazione $\mathbf{F}_v$ a $\mathbf{F}_{\parallel}$ è una forza che la superficie esercita sul fluido in direzione opposta a quella del moto. Questa forza, cui si dà il nome di *forza viscosa*, gioca nel moto dei fluidi un ruolo simile a quello dell'attrito radente nel moto relativo di due solidi a contatto. La forza viscosa cioè, si oppone al moto. Per mantenere un regime stazionario bisogna applicare al fluido dall'esterno una forza in grado di equilibrare la forza viscosa.

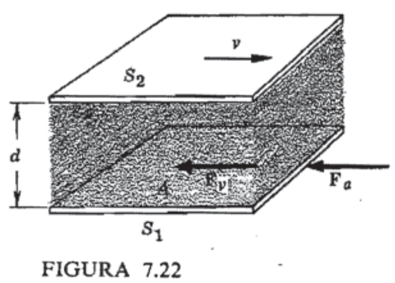

FIGURA 7.22
Un fluido che scorre lungo una superficie piana S_1. La superficie superiore S_2 si muove con velocità costante v_1, per mantenere il fluido in movimento, mentre S_1 è tenuta ferma.

Consideriamo un fluido che scorre sopra una superficie S_1, come è illustrato in Fig. 7.22. Per mantenere lo scorrimento, una seconda superficie S_2, alla sommità del fluido, viene tenuta in movimento nella direzione del moto del fluido con una velocità costante v. Poiché il fluido esercita su S_1 una forza tangenziale $\mathbf{F}$, affinché S_1 rimanga in quiete, bisogna applicare ad essa una forza esterna $\mathbf{F}_a = -\mathbf{F}_{\parallel}$ *. La forza viscosa $\mathbf{F}_v$ è la reazione a $\mathbf{F}_{\parallel}$ per cui

$$\mathbf{F}_v = -\mathbf{F}_{\parallel} = -(-\mathbf{F}_a) = \mathbf{F}_a$$

$\mathbf{F}_v$ risulta così determinata dalla forza necessaria per mantenere ferma S_1.

* Il fluido può esercitare su S_1 anche una forza perpendicolare, ma questa non è che la pressione del fluido che è stata già considerata.

NOTA $\mathbf{F}_a$ e $\mathbf{F}_v$ sono due forze diverse che si verifica essere uguali. $\mathbf{F}_a$ è la forza che viene applicata a S_1 da un agente esterno, mentre $\mathbf{F}_v$ è la forza viscosa che la superficie S_1 esercita sul fluido.

Da studi su F_v con dispositivi sperimentali simili a quello schematizzato in Fig. 7.22 si è trovato che l'intensità di F_v è direttamente proporzionale alla velocità v di S_2 e all'area A di S_1 e inversamente proporzionale alla distanza d tra le superfici. La sua espressione è

$$F_v = \frac{\eta A v}{d} \qquad 7.10$$

dove η** è una costante caratteristica del fluido, detta *viscosità*.

Per capire meglio che cosa sta succedendo, bisogna esaminare più in dettaglio il moto del fluido. Studi effettuati hanno dimostrato che lo strato di fluido a contatto con una superficie aderisce alla superficie e si muove con essa. Cioè questo strato non è mai in moto rispetto alla superficie. Per esempio, lo strato di fluido adiacente a S_2 non scorre lungo la superficie, si muove cioè con la stessa velocità v di S_2 (Fig. 7.23). Lo strato di fluido immediatamente al di sotto è trascinato avanti da questo primo strato ma con una velocità leggermente inferiore per il fatto che lo strato di fluido scorre sopra l'altro. Il secondo strato di fluido trascina il successivo con una velocità ancora minore, e così via finché si raggiunge lo strato di fluido adiacente a S_1. Poiché questo strato aderisce alla superficie S_1 che è ferma, ha velocità zero. Ciò è dimostrato schematicamente in Fig. 7.23 dove la velocità di ciascuno strato è indicata da una freccia la cui lunghezza è proporzionale alla velocità. Il fluido si muove con velocità diverse a differenti distanze da S_1, ma tutti gli strati di fluido si muovono paralleli l'uno all'altro. Questo è il *moto laminare*, la forma più semplice di moto fluido.

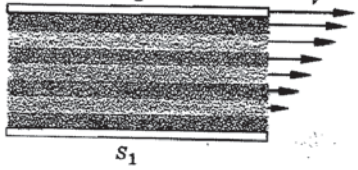

FIGURA 7.23
La velocità di scorrimento tra le due superfici di Fig. 7.22 varia con continuità da v, per il fluido a contatto con la superficie S_2, a zero per il fluido a contatto con la superficie S_1.

In realtà quindi, la forza viscosa non ha la sua origine nello scorrimento del fluido lungo una superficie (come è il caso dell'attrito radente) ma nello scorrimento di uno strato di fluido sull'altro. La forza viscosa è grande quando è grande la forza necessaria a provocare questo scorrimento. La viscosità η è una misura di questa forza necessaria per far scorrere gli strati di fluido uno sull'altro. Un valore elevato di η corrisponde ad un fluido molto viscoso, come la glicerina o l'olio, mentre un piccolo valore di η corrisponde a fluidi come l'acqua o l'etere. La viscosità è una proprietà intrinseca di un fluido e non dipende dalla superficie lungo la quale il fluido si muove. Dalla Eq. 7.10 si ricavano le dimensioni della viscosità

$$[\eta] = \frac{[f][l]}{[l^2][v]} = \frac{[f]}{[l][l/t]}$$
$$= \frac{[f][t]}{[l^2]}$$

Nel sistema SI o mks la unità di viscosità è N · s/m², mentre nel sistema cgs e dina · s/cm².

Definizione L'unità del sistema SI è chiamata un *poiseuille* (PI), e l'unità del sistema cgs è chiamata un *poise* (P). La relazione tra queste unità è

$$\begin{aligned} 1\ \text{PI} &= 1\ \text{N} \cdot \text{s/m}^2 \\ &= \frac{10^5\ \text{dina} \cdot \text{s}}{(10^2\ \text{cm})^2} \\ &= 10\ \text{dina} \cdot \text{s/cm}^2 \\ &= 10\ \text{P} \end{aligned}$$

** η è la lettera greta eta.

TABELLA 7.3 **Viscosità di alcuni liquidi e gas**

Fluido	Temperatura, °C	Viscosità: Poise (dina · s/cm², o P)	Viscosità: Poiseuille (N · s/m², o Pl)
Liquidi			
Acetone	25	0.00316	0.000316
Plasma sanguigno	37	0.015	0.0015
Sangue intero	37	0.04	0.004
Etanolo	20	0.0120	0.00120
Etere	20	0.00233	0.000233
Glicerina	20	14.9	1.49
Mercurio	20	0.0155	0.00155
Olio per macchina	16	1.13	0.113
	38	0.34	0.034
Acqua	0	0.0179	0.00179
	20	0.0100	0.00100
	37	0.00691	0.000691
	100	0.00282	0.000282
Gas			
Aria	0	0.000171	0.0000171
	18	0.000183	0.0000183
	40	0.000190	0.0000190
Elio	20	0.000194	0.0000194
Vapor d'acqua	100	0.000125	0.0000125

La Tab. 7.3 riporta il valore della viscosità per alcuni liquidi e gas molto comuni, sia in unità cgs che SI. Poiché la viscosità di un fluido varia notevolmente con la temperatura, bisogna precisare sempre la temperatura alla quale la viscosità è misurata. Si noti che la viscosità di un gas è molto minore della viscosità di un liquido.

Moto del fluido in un condotto

un condotto di

Consideriamo ora il caso di un fluido che scorre lungo il raggio r e lunghezza L (Fig. 7.24). La velocità dello strato di fluido adiacente alla parete del condotto è zero e il fluido si muove con la massima velocità in corrispondenza all'asse centrale del condotto. La velocità di ogni strato concentrico di fluido varia con regolarità da v_m a zero passando dal centro alla periferia. La velocità media del fluido è pertanto $\bar{v} = \frac{1}{2}v_m$.

Il moto del fluido nel condotto è contrastato dalla forza viscosa esercitata sul fluido dalla parete del condotto. La Eq. 7.10 si applica rigorosamente solo al caso di due superfici piane affacciate, ma può essere usata in questo caso per dare una stima di F_v. Come area nell'Eq. 7.10 prendiamo l'area della parete del condotto, perché è questa l'area a contatto con il fluido. L'area della parete del condotto è uguale alla circonferenza del condotto per la sua lunghezza, cioè

$$A = 2\pi rL$$

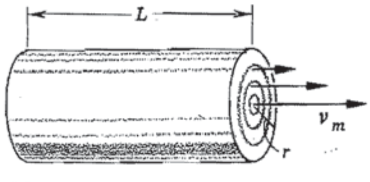

FIGURA 7.24
Scorrimento di un fluido lungo un condotto di raggio r e lunghezza L. La velocità del fluido varia da zero, per il fluido a contatto con il condotto, a v_m per il fluido al centro del condotto.

Come distanza d nella Eq. 7.10 assumiamo il raggio del condotto perché è su questa distanza che la velocità del fluido passa dal valore v_m a zero. Infine, per v prendiamo la velocità massima v_m del fluido. Il risultato è

$$F_v = \eta \frac{2\pi r L v_m}{r} = 2\pi\eta L v_m$$

Questa stima fornisce la corretta dipendenza di F_v da η, L e v_m, ma risulta troppo piccola per un fattore due. Una trattazione più accurata del problema mostra che

$$F_v = 4\pi\eta L v_m \tag{7.11}$$

Questa forza viscosa si oppone allo scorrimento del fluido e per mantenere il fluido in moto stazionario deve essere ad esso applicata una forza trainante di intensità F_v. Se si trascura la gravità le sole altre forze sul fluido sono originate dalla pressione. Il fluido che entra nel condotto da sinistra ad una pressione p_1 esercita una forza p_1A verso destra sul fluido che si trova dentro il condotto, dove con $A = \pi r^2$ si intende ora l'area della sezione del condotto. Il fluido che esce dal condotto sulla destra ad una pressione p_2 esercita una forza p_2A verso sinistra sempre sul fluido che si trova all'interno del condotto. Se p_2 è minore di p_1, c'è una forza risultante di spinta pari a

$$p_1A - p_2A = (p_1 - p_2)A = (p_1 - p_2)\pi r^2$$

sul fluido verso destra. La condizione affinché il moto sia stazionario è che questa forza di spinta sia proprio uguale a F_v,

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = 4\pi\eta L v_m$$

per cui

$$v_m = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\nu L} \tag{7.12}$$

Questa equazione fornisce la velocità nel centro del condotto in funzione della differenza di pressione tra le due estremità del condotto, del raggio e della lunghezza del condotto, e della viscosità del fluido. Per una data differenza di pressione, v_m cresce con r e diminuisce con η e L, il che è ragionevole. Risolvendo l'Eq. 7.12 rispetto a $p_1 - p_2$, si ottiene

$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{4\eta L v_m}{r^2}} \tag{7.13}$$

che rappresenta la differenza di pressione che si produce quando un fluido si muove attraverso un condotto.

Esempio 1 Qual è la caduta di pressione nel sangue quando esso attraversa un capillare lungo 1 mm e di raggio 2 μm (= 2×10^{-6} m) se la velocità del sangue al centro del capillare è di 0.66 mm/s?

In questo problema sono dati $L = 10^{-3}$ m, $r = 2 \times 10^{-6}$ m, $v_m = 6.6 \times 10^{-4}$ m/s e la Tabella 7.3 ci fa sapere che la viscosità del sangue intero è $\eta = 4 \times 10^{-3}$ PI. Introducendo questi valori nella Eq. 7.13 la caduta di pressione attraverso un capillare risulta di

$$p_1 - p_2 = \frac{4(4 \times 10^{-3} \text{ Pl /m}^2)(10^{-3} \text{ m})(0.66 \times 10^{-3} \text{ m/s})}{(2 \times 10^{-6} \text{ m})^2}$$

$$\begin{aligned} &= 0.26 \times 10^4 \text{ Pa} \\ &= (0.26 \times 10^4)(7.50 \times 10^{-3}) \text{ Torr} \\ &= 19.5 \text{ Torr} \end{aligned}$$

Anche se c'è notevole differenza da capillare a capillare, questo è un valore ◇ tipico della caduta di pressione lungo i capillari.

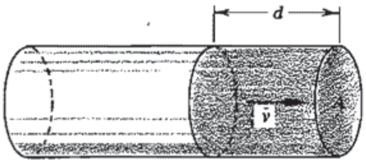

FIGURA 7.25
Un elemento di fluido di lunghezza d che si muove con la velocità media $\bar{v}$.

La grandezza fisica di interesse principale non è tanto la velocità di scorrimento quanto il volume di fluido che passa al secondo attraverso un vaso. Gli si dà il nome di *portata* ed è legata alla velocità media $\bar{v}$ di scorrimento e alla sezione del condotto. La Fig. 7.25 mostra un elemento di fluido di lunghezza d che si muove ed esce da un condotto di raggio r. Se l'elemento si muove con velocità media $\bar{v}$, impiegherà un tempo $t = d/\bar{v}$ per uscire dal condotto. Il volume V di questo elemento di fluido è uguale all'area $A = \pi r^2$ della sezione del condotto per la lunghezza d dell'elemento. La portata è quindi

$$\begin{aligned} Q &= \frac{V}{t} = \frac{Ad}{d/\bar{v}} = A\bar{v} \\ &= \pi r^2 \bar{v} \end{aligned} \tag{7.14}$$

La Fig. 7.26 mostra un fluido che scorre in un condotto il cui raggio varia da r_1 a r_2. Le portate nelle due sezioni del condotto, per l'Eq. 7.14, sono

$$Q_1 = \pi r_1^2 \bar{v}_1 \quad \text{e} \quad Q_2 = \pi r_2^2 \bar{v}_2$$

Se Q_1 fosse maggiore di Q_2, nella regione A entrerebbe più fluido di quanto non ne esce e questo porterebbe ad un accumulo di fluido in A, il che è ovviamente impossibile. Analogamente se Q_1 fosse minore di Q_2, ci sarebbe una carenza di fluido in A. Dato che la quantità di fluido in A non può cambiare, allora Q_1 deve essere uguale a Q_2. Di conseguenza abbiamo

$$r_1^2 \bar{v}_1 = r_2^2 \bar{v}_2$$

Rimane così stabilito che quando varia il raggio di un condotto varia anche la velocità del fluido, in modo che la portata si mantenga costante.

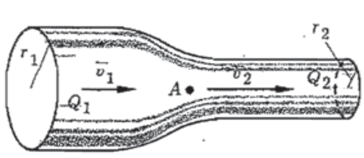

FIGURA 7.26
Quando varia il raggio del condotto varia anche la velocità del fluido in modo che Q_1 sia uguale a Q_2.

Esempio 2 In un adulto normale a riposo, la velocità media del sangue attraverso l'aorta è $\bar{v} = 0.33$ m/s. Qual è la portata attraverso un'aorta di raggio $r = 9$ mm?

L'area della sezione dell'aorta è

$$A = \pi r^2 = (3.14)(9 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

e perciò la portata risulta

$$\begin{aligned} Q &= A\bar{v} = (2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(0.33 \text{ m/s}) \\ &= 0.83 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 83 \text{ cm}^3/\text{s} \end{aligned}$$