

VETTORI: DEFINIZIONI

Se ad una grandezza fisica G si associa una direzione ed un verso si parla di vettori: $\vec{G}$ (o $\mathbf{G}$)

✓ Le grandezze fisiche possono essere di due tipi:

SCALARE: numero con le sue unità di misura (es: la temperatura, l'energia etc.)

VETTORIALE: grandezza definita da una direzione, un verso e da un modulo (o intensità)

Esempio: vettore spostamento, vettore velocità, vettore accelerazione;
le forze sono grandezze fisiche vettoriali.

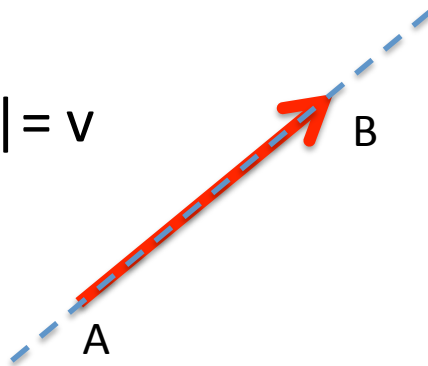
✓ Graficamente i vettori si indicano con dei segmenti orientati di rette (delle ``freccie’’):

direzione: data da una retta

verso: uno dei due versi possibili lungo la retta

modulo: corrisponde alla lunghezza della freccia (in una unita` di misura opportuna)

vettore $\vec{v}$ di modulo $|\vec{v}| = v$



N.B.: il punto a cui si ``attacca’’ l’origine (o ``coda’’) del vettore si chiama punto di applicazione.

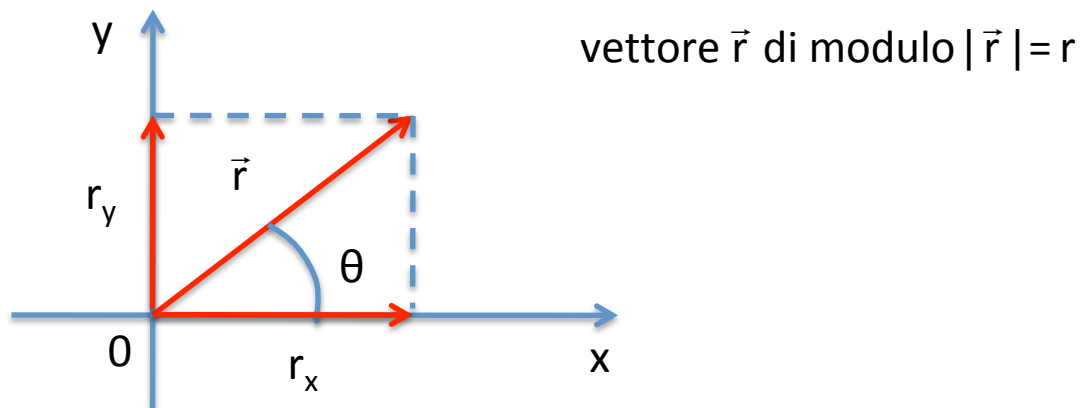
Attenzione che vettori che hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo rappresentano in realta` lo stesso vettore

Quindi si puo` liberamente traslare un vettore parallelamente a se stesso ed applicarlo a qualsiasi punto si voglia



COMPONENTI DEI VETTORI

Supponete di aver scelto un sistema di coordinate (o sistema di riferimento)



Le componenti di un vettore sono le sue **proiezioni sugli assi**:

$$\begin{cases} r_x = r \cos\theta \\ r_y = r \sin\theta \end{cases}$$

Scomposizione del vettore nelle sue componenti

COMPONENTI DEI VETTORI

Identificare il vettore con un modulo, una direzione ed un verso, oppure attraverso le sue componenti r_x ed r_y e' equivalente.

Infatti: dati r e θ , ottengo le sue componenti dalle formule precedenti;
viceversa date le sue componenti ottengo il modulo r e la direzione (data da θ se il vettore giace sul piano x-y) dalle formule:

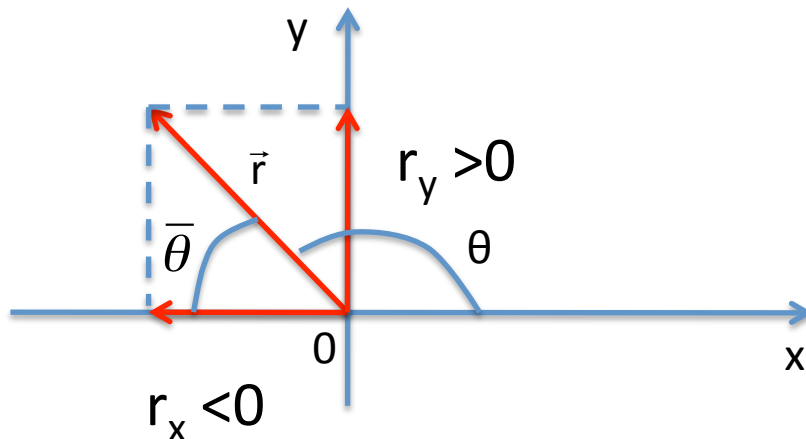
$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{r_y}{r_x} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{r_y}{r_x}\right) \quad \text{o} \quad \theta = \arccos\left(\frac{r_x}{r}\right) \end{array} \right.$$

Possiamo quindi scrivere $\vec{r} \equiv (r_x, r_y)$ come una coppia ordinata di numeri

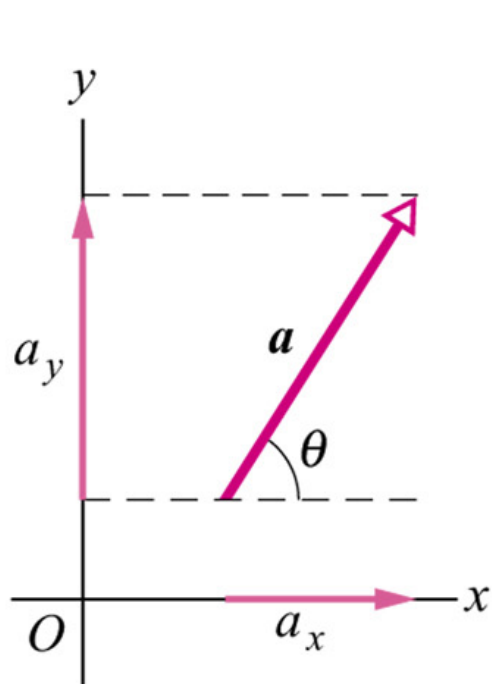
COMPONENTI DEI VETTORI

N.B.: r_x e r_y possono essere positivi o negativi.

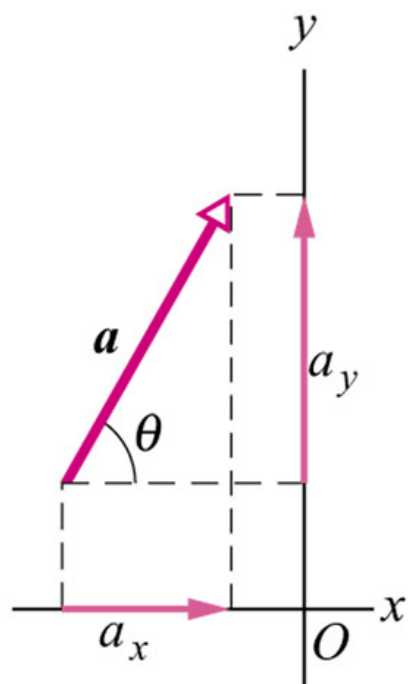
Esempio:



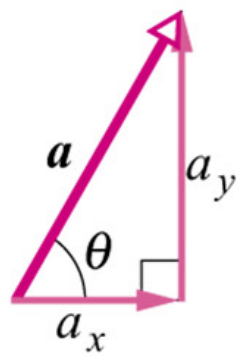
$$r_x = r \cos \theta = r \cos(180 - \bar{\theta}) = -r \cos \bar{\theta} = < 0$$



(a)



(b)

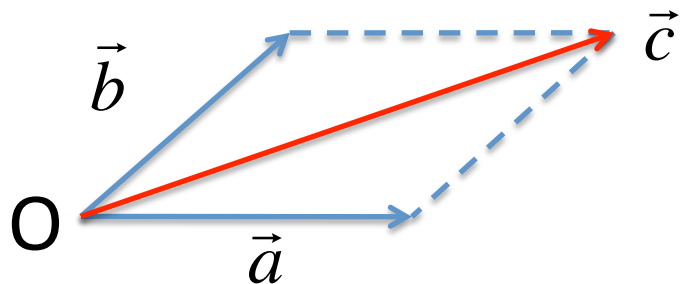


(c)

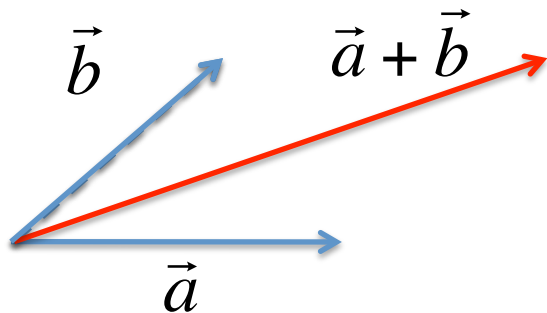
OPERAZIONI CON I VETTORI: SOMMA

La **somma (o risultante)** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

✓ **Metodo grafico del parallelogramma:** metto i vettori con l'origine nello stesso punto O e costruisco il parallelogramma che li ha come lati; la somma è la diagonale che parte da O.

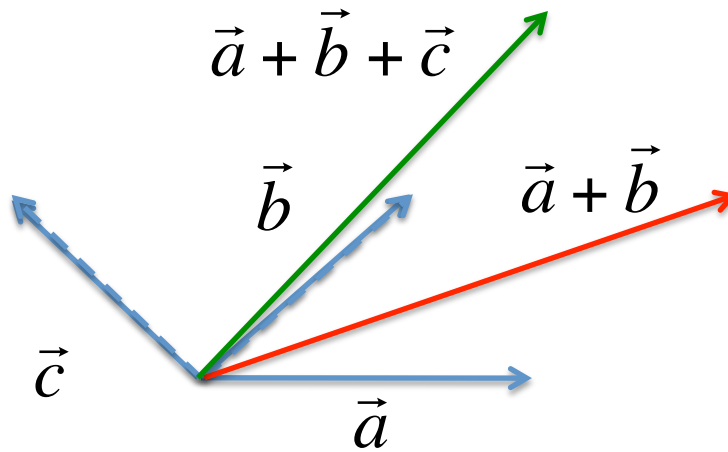


Oppure: metto il vettore $\vec{b}$ con la sua origine (o "coda") sulla punta di $\vec{a}$: la somma è il vettore che congiunge l'origine di $\vec{a}$ con la punta di $\vec{b}$



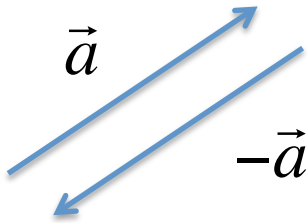
SOMMA

✓ Se ho piu` vettori (per esempio tre): $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



PROPRIETA' DELLA SOMMA

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (proprietà commutativa).
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (proprietà associativa)
3. Si definisce con $-\vec{a}$ (opposto di $\vec{a}$) un vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{a}$ ma **verso opposto**:



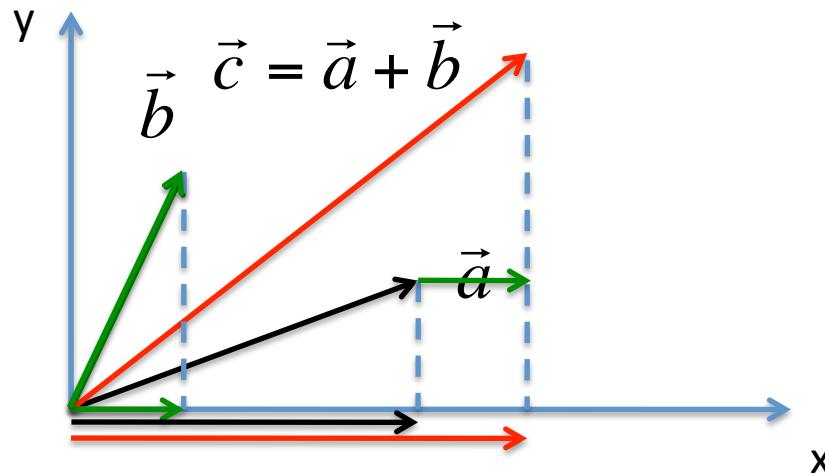
Allora si ha: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

SOMMA TRA VETTORI IN TERMINI DELLE COMPONENTI

Si consideri $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

In termini delle componenti risulta: $\vec{c} = (c_x, c_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y)$

ovvero si devono sommare le rispettive componenti dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



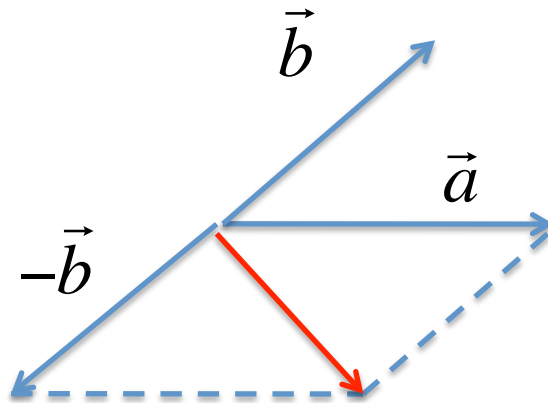
$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

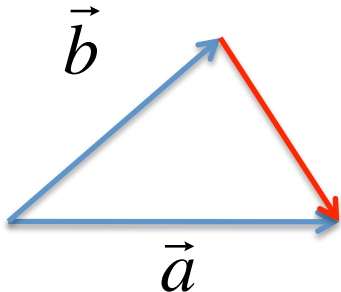
DIFFERENZA TRA VETTORI

La differenza tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un vettore:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + (-\vec{b})$$



Oppure, **piu` semplicemente: dalla punta di $\vec{b}$ alla punta di $\vec{a}$**



DIFFERENZA TRA VETTORI IN TERMINI DELLE COMPONENTI

✓ Si consideri $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

In termini delle componenti risulta: $\vec{c} = (c_x, c_y) = (a_x - b_x, a_y - b_y)$

ovvero si fa la differenza tra le rispettive componenti dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

✓ N.B.1: Scrivere $\vec{c} = \vec{a}$ equivale a scrivere $(c_x, c_y) = (a_x, a_y)$

e quindi componente per componente questo **equivale a due equazioni**

$$c_x = a_x, \quad c_y = a_y$$

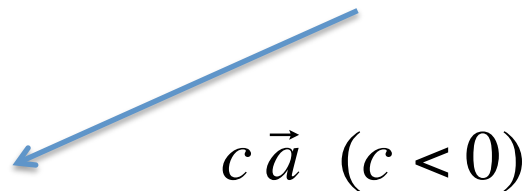
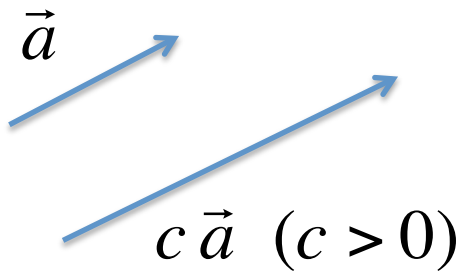
N.B.2: La espressione $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$ si puo` riscrivere come $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

PRODOTTO TRA UNO SCALARE ED UN VETTORE

Il prodotto di un vettore $\vec{a}$ per uno scalare c (cioè un numero), è un vettore

$$c\vec{a}$$

1. Ha la stessa direzione di $\vec{a}$
2. modulo dato da: $a \times |c|$
3. verso: uguale a quello di $\vec{a}$ se $c > 0$, verso opposto a quello di $\vec{a}$ se $c < 0$



PRODOTTO TRA UNO SCALARE ED UN VETTORE IN TERMINI DELLE COMPONENTI

$$c \vec{a} \equiv (c a_x, c a_y)$$

VETTORI UNITARI (O VERSORI)

✓ Dato un qualsiasi vettore $\vec{a}$ posso considerare il vettore: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\hat{a}$ è un vettore che ha **stessa direzione e verso di $\vec{a}$** e modulo pari ad uno (ed è senza dimensioni):

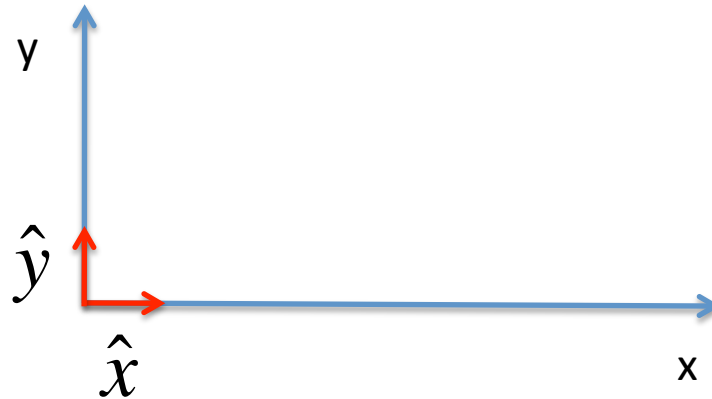
$$|\hat{a}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$

✓ Pertanto il vettore $\hat{a}$ viene anche chiamato **il versore** di $\vec{a}$, **perché ne indica semplicemente la direzione ed il verso**. Possiamo infatti scrivere:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$$

VETTORI UNITARI (O VERSORI)

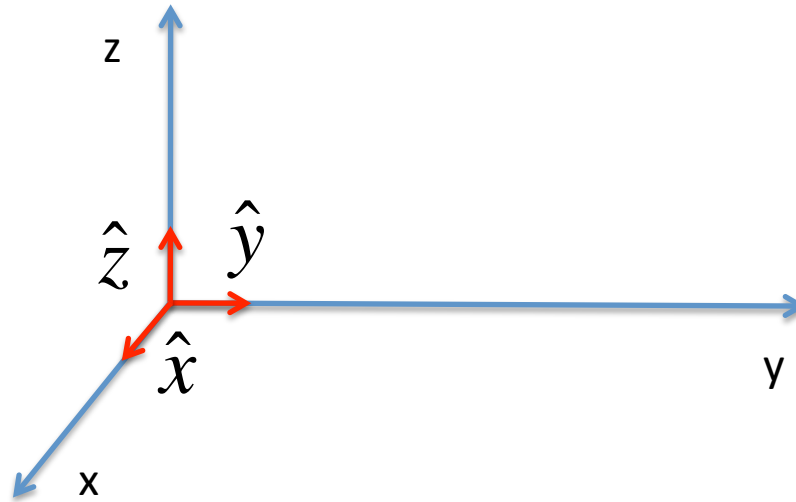
Allora, dato il sistema di riferimento con assi coordinati x e y si possono individuare due versori, uno che punta verso l'asse positivo delle x e uno che punta verso l'asse positivo delle y :



$\hat{x}$ e $\hat{y}$ hanno modulo unitario e sono adimensionali

VETTORI UNITARI (O VERSORI)

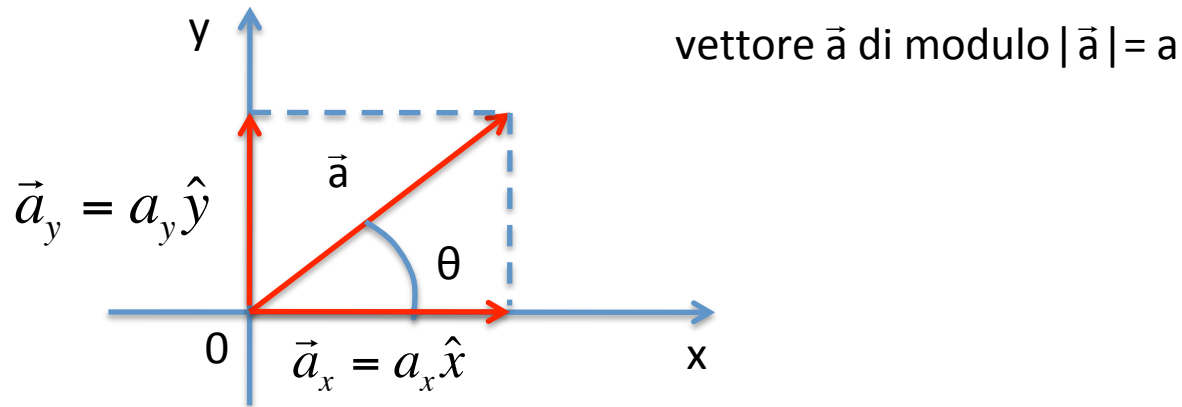
In modo analogo nelle 3 dimensioni spaziali



$\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ hanno modulo unitario (e sono adimensionali) e indicano la direzione e verso degli assi coordinati che ho fissato

COMPONENTI VETTORIALI DEI VETTORI

Supponete di aver scelto un sistema di coordinate (o sistema di riferimento)



Possiamo scrivere il vettore $\vec{a}$ nel seguente modo:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_x = a_x \hat{x}$$

$$\vec{a}_y = a_y \hat{y}$$

Si sta proiettando $\vec{a}$ lungo gli assi x e y

COMPONENTI VETTORIALI DEI VETTORI

Allora per la somma (o la differenza) si potrà scrivere:

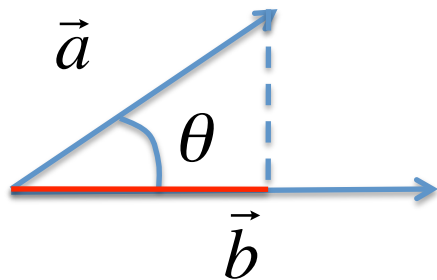
$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y}) + (b_x \hat{x} + b_y \hat{y}) \\ &= (a_x + b_x) \hat{x} + (a_y + b_y) \hat{y}\end{aligned}$$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si indica come **prodotto scalare** tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \theta$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori (e a e b sono i moduli dei due vettori). **E' un numero**



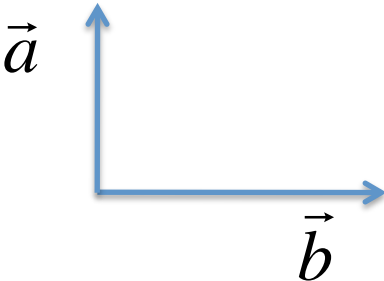
N.B.:

L'operazione di prodotto scalare equivale a proiettare $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$

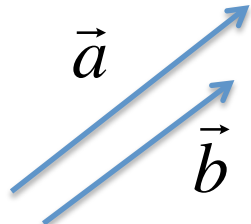
PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI

Infatti: casi particolari

1.


$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a b \cos 90^\circ = 0$$

2.


$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a b \cos 0^\circ = a b$$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI: PROPRIETA'

1. $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (proprietà commutativa)

$$(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{a} \bullet \vec{d} + \vec{b} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{d}$$

(proprietà distributiva)

2. **In termini delle componenti:**

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y}) \bullet (b_x \hat{x} + b_y \hat{y}) = a_x b_x + a_y b_y$$

3. In particolare $\vec{a} \bullet \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 = a^2$
corrisponde quindi al modulo al quadrato del vettore

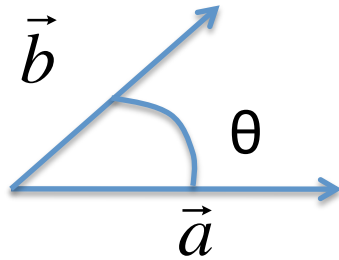
PRODOTTO VETTORIALE

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il prodotto vettoriale **e' un vettore** che si indica

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

ed e' cosi' definito:

- **modulo: $c = a b \sin\theta$** , dove θ e' l'angolo minore formato dai due vettori

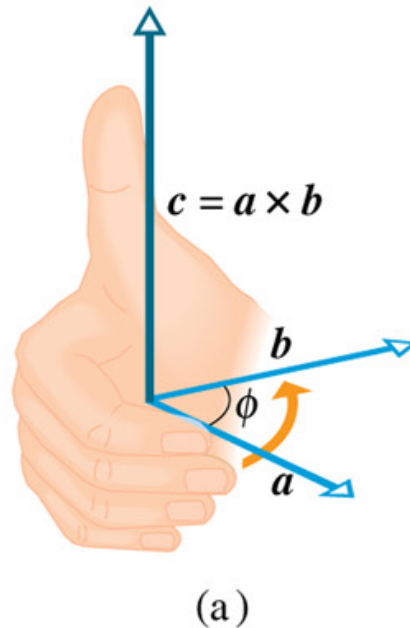


Il modulo rappresenta l'area del parallelogramma formato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

- **direzione e verso:**

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore ortogonale (cioè perpendicolare) al piano individuato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

il verso si determina con la **“regola della mano destra”**



PROPRIETA' DEL PRODOTTO VETTORIALE

- ✓ Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli: $\theta=0$ e $\sin\theta=0$, allora il prodotto vettoriale è zero

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

- ✓ Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono ortogonali: $\theta=90^\circ$, $\sin\theta=1$ allora $c=a b$

- ✓ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

- ✓ $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$ (proprietà distributiva)

- ✓ $s (\vec{a} \times \vec{b}) = (s \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s \vec{b})$ (prodotto per uno scalare)

PROPRIETA' DEL PRODOTTO VETTORIALE

✓ In termini delle componenti:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}) = \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) \hat{x} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{y} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{z}\end{aligned}$$

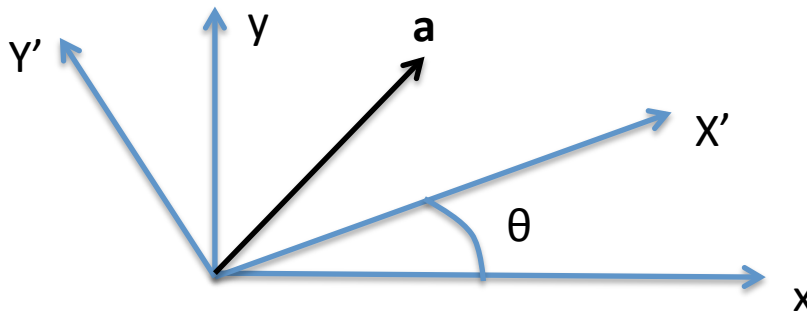
Es.:

$$a_x \hat{x} \times b_x \hat{x} = a_x b_x (\hat{x} \times \hat{x}) = 0$$

$$a_x \hat{x} \times b_y \hat{y} = a_x b_y (\hat{x} \times \hat{y}) = a_x b_y \hat{z}$$

VETTORI, LEGGI DELLA FISICA E SISTEMI DI RIFERIMENTO

La scelta di un sistema di riferimento con le sue coordinate è completamente arbitraria. Per esempio, dato un sistema di riferimento possiamo benissimo pensare di sceglierne un altro che è ruotato di un certo angolo rispetto a quello iniziale.



Nel sistema ruotato le componenti del vettore **a** saranno diverse (a'_x, a'_y). Tuttavia il vettore **a** è un oggetto ben definito, non cambia; le sue componenti sono solo il modo di rappresentarlo, di “vederlo” in due sistemi di riferimento. Tanto è vero che le sue componenti nel caso di una rotazione sono legate dalla legge di trasformazione (nell'esempio considerato una rotazione):

$$a'_x = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta$$

$$a'_y = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta$$

VETTORI, LEGGI DELLA FISICA E SISTEMI DI RIFERIMENTO

Che il vettore **a** non cambi lo si può capire per esempio se uno si calcola il suo modulo a partire dalle sue componenti nei due sistemi di riferimento; si trova

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

E la sua orientazione nello spazio è sempre la stessa.

In modo analogo le leggi della fisica non dipendono dalla direzione degli assi (ovvero se il sistema di riferimento è ruotato). Non dipendono nemmeno da dove è l'origine del sistema di riferimento. Come già sottolineato, non dipendono dalla scelta della unità di misura.

