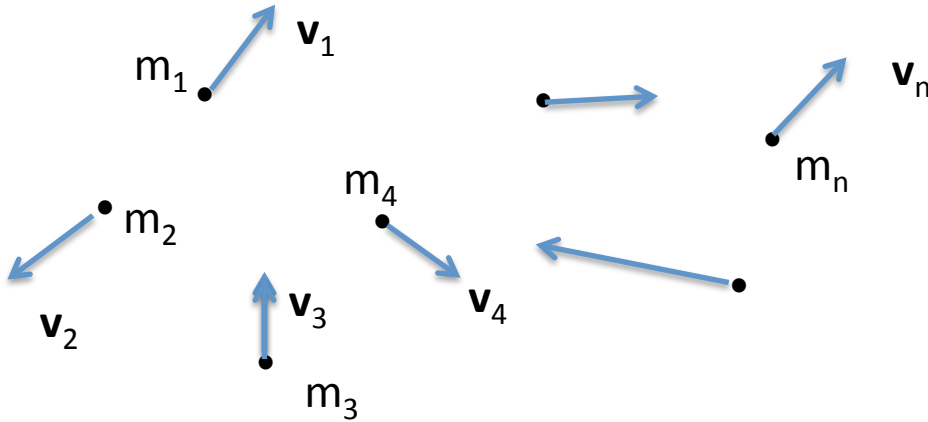


DINAMICA DEI SISTEMI

- Vogliamo estendere le leggi della dinamica viste fin qui per corpi puntiformi al caso di ***sistemi costituiti da piu` particelle***.
- Quello che vedremo sara` utile per poter vedere quali sono le leggi della dinamica per sistemi materiali estesi (per esempio corpi solidi, che possono essere sempre pensati come un insieme di piu` elementi ciascuno con la sua massa dm).

DINAMICA DEI SISTEMI

- Consideriamo un insieme di n punti materiali. Ciascuno avrà la sua massa, la sua velocità e la sua quantità di moto.



- Per ciascuna di queste particelle varrà la II legge di Newton

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

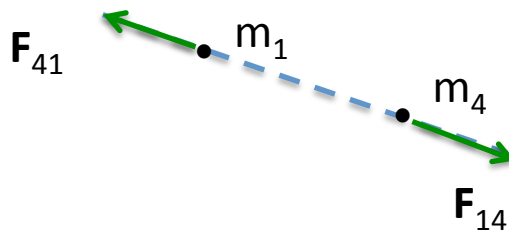
si tratta di n -equazioni vettoriali per le n -particelle. E' un problema estremamente complesso (qui $i=1,2,\dots,n$ e $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ e' la quantità di moto della particella i -esima)

- **Per cui scopo delle seguenti lezioni sarà quello di derivare delle equazioni che permettano di ottenere delle informazioni sul moto del sistema diciamo così nel suo insieme**

DINAMICA DEI SISTEMI: TIPI DI FORZE

➤ Sul sistema possono agire sia delle **forze esterne al sistema**, che delle **forze interne al sistema**

- * Le **forze interne** sono le forze che ciascuna particella esercita sulle altre; sono costituite dall'azione e dalla rispettiva reazione (secondo la III legge della dinamica) con cui coppie di particelle interagiscono tra loro



ovvero forze che sono l'una l'opposto dell'altra $F_{14} = -F_{41}$ e con la stessa retta di applicazione

- * **Le forze esterne** sono quelle forze che sono esercitate invece da agenti esterni al sistema. Tipico esempio: la forza peso che agisce su ciascuna particella esercitata dalla forza di attrazione gravitazionale da parte della Terra.

II LEGGE DI NEWTON PER SISTEMI DI PIU' PARTICELLE

- Ciascuna particella avra' la sua quantita' di moto $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$.
Pertanto viene naturale definire **la quantita' di moto totale del sistema** come la somma delle quantita' di moto delle singole particelle

$$\vec{P}^{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

- Adesso deriviamo rispetto al tempo sia a sinistra che a destra dell'uguale:

$$\frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}^{TOT}$$

dove $\vec{F}_i$ e' la forza (totale) agente sulla i-esima particella, e $\vec{F}^{TOT}$ e' la risultante delle forze agenti sul sistema, ovvero la somma di tutte le forze che agiscono sulle diverse particelle.

- Vediamo allora gia' da questa equazione una chiara analogia con la II legge di Newton per una singola particella

II LEGGE DI NEWTON PER SISTEMI DI PIU' PARTICELLE

- Ma nel caso dei sistemi di più particelle c'è una **semplificazione importante** per la II legge di Newton:

Infatti nella equazione
$$\frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt} = \vec{F}^{TOT}$$

a destra dell'uguale stiamo sommando su tutte le forze che agiscono sul sistema. **Come abbiamo detto ci sono sia forze interne che esterne.** Ma le forze interne al sistema sono coppie di azione e reazione e pertanto nella somma che si deve fare **per calcolare F^{TOT} la somma delle forze interne si annulla** (devo fare le somme di forze interne che per ciascuna coppia di punti sono l'una l'opposta dell'altra).

- Pertanto otteniamo il primo risultato importante

$$\vec{F}_{est.}^{TOT} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt}$$

Il Legge di Newton per un sistema di particella

dove $\vec{F}_{est.}^{TOT}$ è la somma delle **SOLE** forze esterne agenti sul sistema, mentre non entrano in gioco le forze interne al sistema.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO TOTALE

➤ Dal risultato appena visto

$$\vec{F}_{est.}^{TOT} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt}$$

segue allora un principio molto importante in fisica:

Se la risultante delle forze esterne e' nulla, $\vec{F}_{est.}^{TOT} = 0$, allora la quantita' di moto totale del sistema si conserva (cioe' rimane costante nel tempo durante il moto)

** Infatti cosa vuol dire che $\vec{F}_{est.}^{TOT} = 0$? Dal momento che $\vec{F}_{est.}^{TOT} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt}$ allora

$$\frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{cost.}$$

visto che se la derivata di una certa grandezza rispetto al tempo e' zero vuol dire che quella grandezza non varia nel tempo, ovvero rimane costante.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO TOTALE

- **N.B.1:** si noti che quello che si conserva è un vettore, il vettore quantità di moto totale, quindi questo vettore non cambia in modulo, direzione, e verso.

Da un punto di vista pratico (dei calcoli) dire che

$$\vec{P} = \text{cost.}$$

equivale a TRE equazioni di conservazione, una per ciascuna componente della quantità di moto totale lungo i tre assi x,y,z (una volta fissato un sistema di riferimento). Ovvero:

$$P_x = \text{cost.}$$

$$P_y = \text{cost.}$$

$$P_z = \text{cost.}$$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO TOTALE

➤ N.B.2: dato che

$$\vec{F}_{est.}^{TOT} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt}$$

se anche solo una delle componenti di $\vec{F}_{est.}^{TOT}$ è zero, allora la rispettiva componente della quantità di moto si conserva.

Per esempio se

$$F_{est.x}^{TOT} = 0$$

allora

$$P_x = \text{cost.}$$

Momento angolare e momento di una forza

- Ritorniamo per un momento alla dinamica di una singola particella. Definiamo il momento della quantità di moto della particella, detto anche **momento angolare**.
- Supponiamo che una particella si trovi a un certo istante nel punto P e si stia muovendo con velocità $\mathbf{v}$ e quindi ha quantità di moto $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Consideriamo un qualsiasi punto nello spazio (consideriamolo fisso per semplicità) e indichiamolo con Ω (Omega) (si chiama “polo”).

Allora **il momento angolare della particella** è la quantità

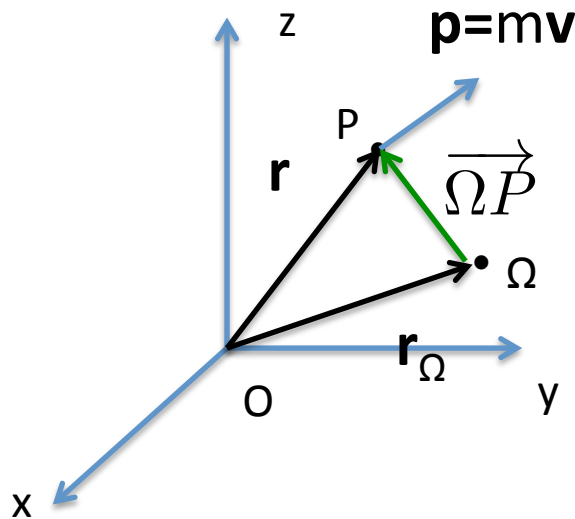
$$\vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}$$

ove il prodotto vettoriale tra il vettore $\overrightarrow{\Omega P}$, che individua la posizione della particella rispetto al polo Omega (ovvero il vettore che parte da Omega e arriva alla particella), e la quantità di moto $\vec{p}$ della particella.

Momento angolare e momento di una forza

➤ *Qual e' il significato fisico di questa quantita' e quando serve?*

Questa quantita' serve per descrivere dei **moti di rotazione**. Lo si capisce se calcolate qual e' la direzione e verso del momento angolare in base alla definizione di prodotto vettoriale tra due vettori.



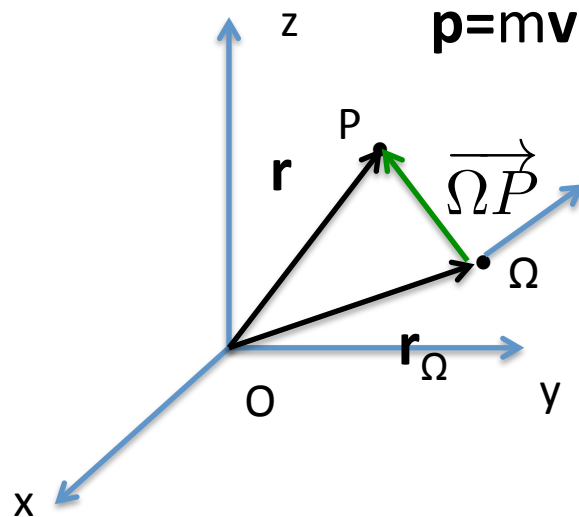
$$\vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}$$

Si vede allora che il momento angolare e' come se descrivesse la rotazione istantanea della particella attorno al polo Ω scelto

Momento angolare e momento di una forza

➤ *Qual e' il significato fisico di questa quantita' e quando serve?*

Questa quantita' serve per descrivere dei **moti di rotazione**. Lo si capisce se calcolate qual e' la direzione e verso del momento angolare in base alla definizione di prodotto vettoriale tra due vettori.



$$\vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}$$

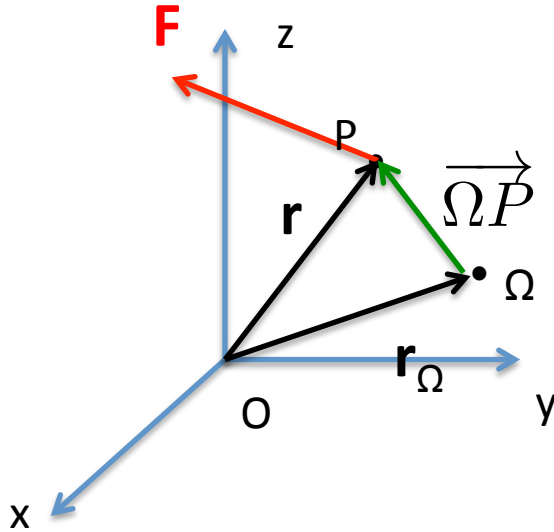
Si vede allora che il momento angolare e' come se descrivesse la rotazione istantanea della particella attorno al polo Ω scelto (in base alla regola della mano destra il momento angolare e' un vettore entrante nel foglio, e il palmo della mano destra, quando si chiude verso il vettore quantita' di moto – il vettore blu – indica il verso di rotazione istantanea della particella attorno al polo Omega).

Momento angolare e momento di una forza

➤ *Momento di una forza*

Supponiamo che sulla particella in P agisca una forza $\mathbf{F}$.

Allora si definisce come momento di $\mathbf{F}$ (rispetto al polo Ω) il prodotto vettoriale tra il vettore $\overrightarrow{\Omega P}$ e la forza $\mathbf{F}$.



$$\vec{\tau} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{F}$$

Momento angolare e momento di una forza

- La II Legge di Newton per una particella si può anche esprimere in termini del momento angolare e del momento della risultante delle forze che agiscono sulla particella. ***Risulta infatti che vale la seguente legge (nel caso di un polo fisso)***

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

In parole: il momento della forza risultante τ (rispetto al polo Ω) è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare (rispetto al medesimo polo).

- N.B. per una dimostrazione si veda la slide dopo
- Per la singola particella questa equazione non è altro se non un modo diverso di riscrivere la II Legge di Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si noti la chiara analogia: così come la variazione della quantità di moto nel tempo è data dalla forza $\mathbf{F}$, così la variazione del **momento della quantità di moto $\mathbf{p}$** (o momento angolare) è data dal **momento della forza τ**

Dimostrazione del risultato precedente

Consideriamo il momento della quantità di moto rispetto al polo Ω

$$(65) \quad \vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}$$

e deriviamolo rispetto al tempo. Otteniamo

$$(66) \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d[\overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}]}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\Omega P}}{dt} \times \vec{p} + \overrightarrow{\Omega P} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Ma

$$(67) \quad \overrightarrow{\Omega P} = \vec{r} - \vec{r}_{\Omega},$$

quindi la derivata rispetto al tempo di questo termine da

$$(68) \quad \frac{d\overrightarrow{\Omega P}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{\Omega}}{dt} = \vec{v},$$

dal momento che abbiamo ipotizzato che il polo Ω è fisso e quindi $d\vec{r}_{\Omega}/dt = 0$. A questo punto però notate che il primo termine a destra dell'uguale nella Eq. (66) è zero, ovvero

$$(69) \quad \frac{d\overrightarrow{\Omega P}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m(\vec{v} \times \vec{v}) = 0.$$

Questo perchè $\vec{p} = m\vec{v}$ è un vettore parallelo alla velocità $\vec{v}$, e ricordate che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è zero.

Dimostrazione del risultato precedente

Pertanto la Eq. (66) risulta essere

$$(70) \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \overrightarrow{\Omega P} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Infine basta ricordarsi della II legge di Newton per una particella espressa tramite la quantità di moto della particella

$$(71) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

dove $\vec{F}$ è la risultante delle forze agenti sulla particella. Pertanto si ha

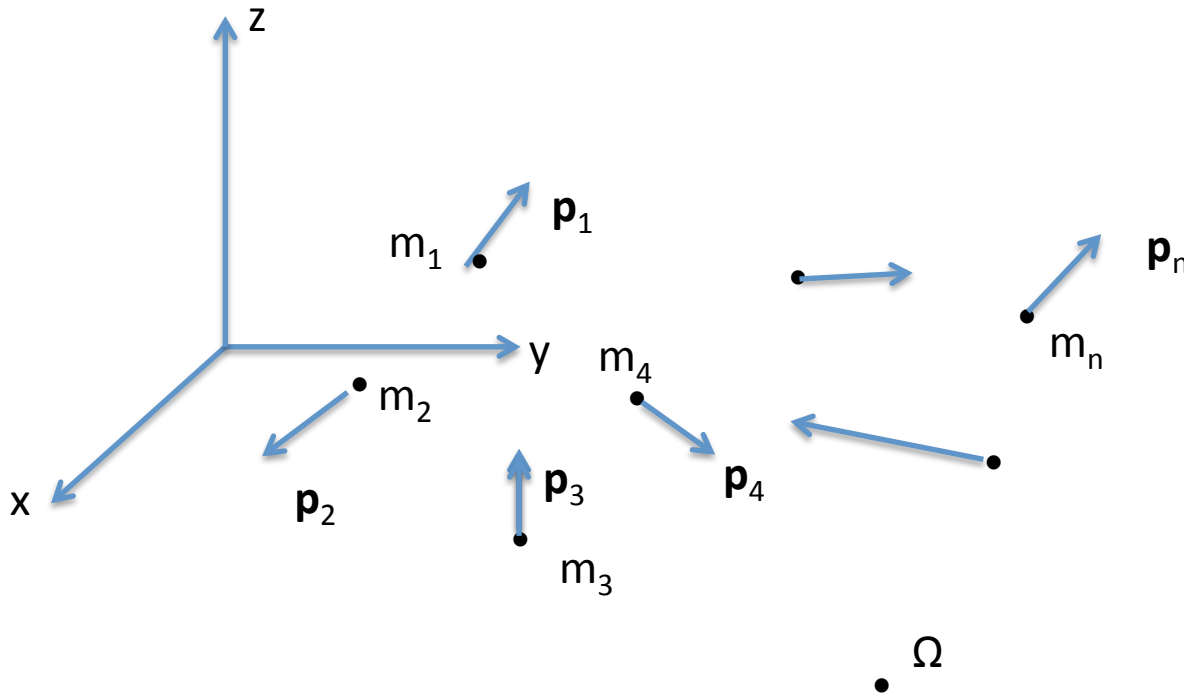
$$(72) \quad \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \overrightarrow{\Omega P} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{F} = \vec{\tau},$$

il che dimostra il risultato anticipato prima.

Estensione ad un sistema di piu` particelle

- Definiamo il **momento angolare totale** come la somma di tutti i momenti angolari di tutte le particelle (rispetto ad un polo fisso Ω).

$$\vec{L}^{tot} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \dots + \vec{\ell}_n$$



Estensione ad un sistema di piu` particelle

- Definiamo il momento angolare totale come la somma di tutti i momenti angolari di tutte le particelle (rispetto ad un polo fisso Ω).

$$\vec{L}^{tot} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \dots + \vec{\ell}_n$$

- Adesso deriviamo rispetto al tempo sia a sinistra che a destra dell'uguale

$$\frac{d\vec{L}^{tot}}{dt} = \frac{d\vec{\ell}_1}{dt} + \frac{d\vec{\ell}_2}{dt} + \frac{d\vec{\ell}_3}{dt} + \dots + \frac{d\vec{\ell}_n}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots \vec{\tau}_n$$

A questo punto viene naturale definire come **momento totale delle forze** che agiscono sul sistema la somma dei momenti delle forze che agiscono sul sistema

$$\vec{\tau}^{tot} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots \vec{\tau}_n$$

- ***Pertanto otteniamo un secondo risultato importante***

$$\vec{\tau}^{tot} = \frac{d\vec{L}^{tot}}{dt}$$

Estensione ad un sistema di piu` particelle

- Ma come per la estensione della II Legge di Newton ad un sistema di particelle, anche per questa equazione vale una **importante semplificazione:**

per calcolare il momento totale delle forze $\vec{\tau}^{tot}$ **le uniche forze che contano solo solo quelle esterne al sistema.**

Ovvero si avra` allora

$$\vec{\tau}_{est}^{tot} = \frac{d\vec{L}^{tot}}{dt}$$

Dove con $\vec{\tau}_{est}^{tot}$ indichiamo appunto la somma di tutti i momenti delle **forze esterne**.

- N.B.: per capire perche` anche in questo caso contano solo le forze esterne si veda esercizio svolto in classe su ``coppie di forze”.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE TOTALE

- Se il momento totale delle forze esterne (rispetto a un polo Ω) è nullo

$$\vec{\tau}_{est}^{tot} = 0$$



$$\vec{L}^{tot} = \text{costante}$$

(dove $\mathbf{L}^{TOT}$ momento angolare totale calcolato rispetto allo stesso polo Ω).

- N.B1.: valgono le stesse considerazioni fatte sulla conservazione della quantità di moto totale.

Ovvero quello che si conserva è un vettore e quindi $\vec{L}^{tot} = \text{costante}$ equivale a tre leggi di conservazione

$$L_x^{tot} = \text{costante}$$

$$L_y^{tot} = \text{costante}$$

$$L_z^{tot} = \text{costante}$$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE TOTALE

- N.B.2: se anche sola una componente del momento totale delle forze esterne è nulla allora vale una legge di conservazione per la corrispondente componente del momento angolare totale.

Per esempio: se

$$\tau_{est\,x}^{tot} = 0$$



$$L_x^{tot} = costante$$