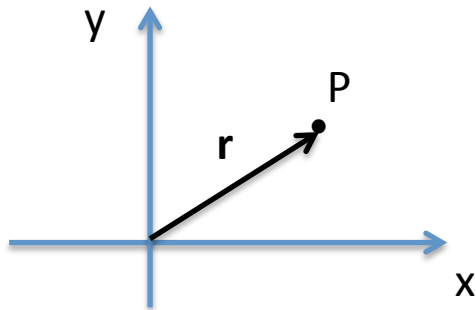


MOTI in 2 o 3 DIMENSIONI:

Posizione, spostamento; velocità ed accelerazione (media ed istantanea) come vettori.

- Vediamo adesso come applicare quello visto sui vettori a varie grandezze fisiche.
- Si fissi un sistema di riferimento (consideriamo il caso a due dimensioni per semplicità).



Supponiamo che a un certo istante un corpo puntiforme occupi il punto P. La sua posizione rispetto all'origine del sistema di riferimento è data dal vettore posizione **r** (o raggio vettore), che è quel vettore che parte dall'origine e arriva in P.

Le sue unità di misura sono il metro.

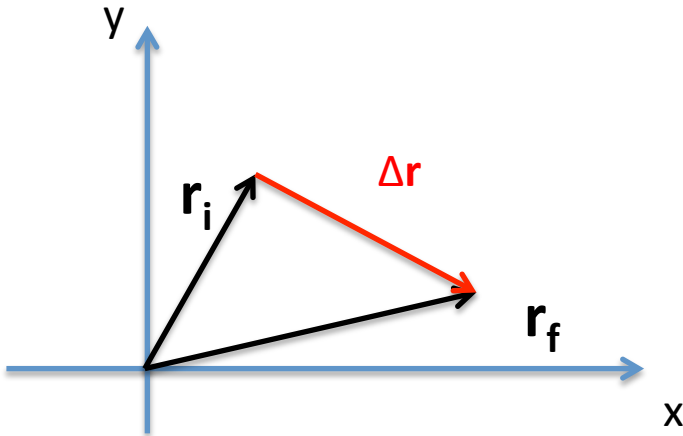
Le sue componenti lungo gli assi x e y sono le coordinate del punto rispetto al sistema di riferimento scelto

$\mathbf{r} = (x, y)$, oppure, usando i versori degli assi

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

N.B.: nel testo e nelle formule indicherò i vettori o con delle lettere con sopra delle frecce o con delle lettere in grassetto. Queste due sono le convenzioni che di solito vengono usate

VETTORE SPOSTAMENTO



Supponiamo che il corpo in movimento occupi a un istante iniziale t_i la posizione individuata dal raggio vettore $\mathbf{r}(t_i)=\mathbf{r}_i$, e a un istante finale t_f la posizione $\mathbf{r}(t_f)=\mathbf{r}_f$.

Allora il vettore spostamento è

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

In termini delle componenti (usando quello visto per la differenza tra due vettori) avremo:

$$\Delta \vec{r} \equiv (\Delta x, \Delta y) = (x_f - x_i, y_f - y_i)$$

Seguendo le regole grafiche descritte per la differenza tra due vettori abbiamo disegnato il vettore spostamento: il vettore che va dalla punta di $\mathbf{r}_i$ alla punta della posizione finale $\mathbf{r}_f$, indicando così appunto lo spostamento del corpo dalla posizione iniziale a quella finale.

LEGGE ORARIA

In generale la posizione del corpo puntiforme sarà diversa da istante ad istante. Quindi ad ogni istante t associamo la corrispondente posizione della particella

$$t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

In modo analogo al caso unidimensionale se conosciamo istante per istante la posizione della particella (o equivalentemente le sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) allora sappiamo tutto del suo moto.

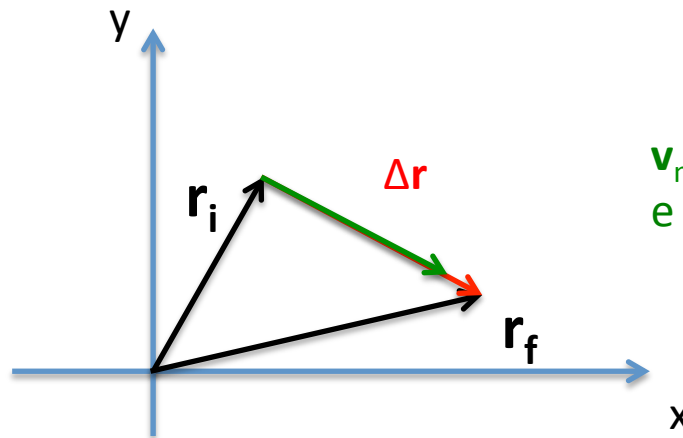
La funzione del tempo $t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ si chiama **Legge oraria del moto**

VETTORE VELOCITA' MEDIA

In modo analogo al caso unidimensionale si definisce la velocità vettoriale media come

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

N.B.: se $\Delta \mathbf{r}$ è un vettore allora $\mathbf{v}_m$ è un vettore, perché è dato dal prodotto tra un vettore ($\Delta \mathbf{r}$) e uno scalare (un numero), cioè $(1/\Delta t)$. Siccome $\Delta t > 0$ allora la velocità media $\mathbf{v}_m$ è un vettore che ha la stessa direzione e verso dello spostamento $\Delta \mathbf{r}$.



$\mathbf{v}_m$ è un vettore con la stessa direzione e verso di $\Delta \mathbf{r}$

VETTORE VELOCITA' MEDIA

La definizione sopra e' una relazione vettoriale, quindi deve valere come al solito componente per componente, ovvero:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$$

ETTORE VELOCITA` ISTANTANEA

In modo analogo al caso unidimensionale si definisce **la velocità vettoriale istantanea** (o semplicemente vettore velocità) come

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

ovvero il limite della velocità media (relativa ad un certo intervallo di tempo Δt), per un intervallo di tempo via via sempre più piccolo, al limite infinitesimo.

In modo analogo al caso unidimensionale la velocità istantanea è quindi la derivata rispetto al tempo della posizione

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

dove la posizione della particella $\mathbf{r}$ varia in genere da istante ad istante, ovvero $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Chiaramente anche la velocità potrà in genere variare da istante ad istante, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$.

ETTORE VELOCITA` ISTANTANEA

Cosa vuol dire da un punto di vista ``pratico'' calcolarsi la derivata rispetto al tempo di un vettore (in questo caso $\mathbf{r}(t)$)?

Siccome possiamo identificare il vettore posizione con la coppia (o terna) ordinata delle sue componenti (le coordinate x e y occupate via via durante il moto dalla particella) , ovvero $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$, la derivata rispetto al tempo di $\mathbf{r}(t)$ e` data da

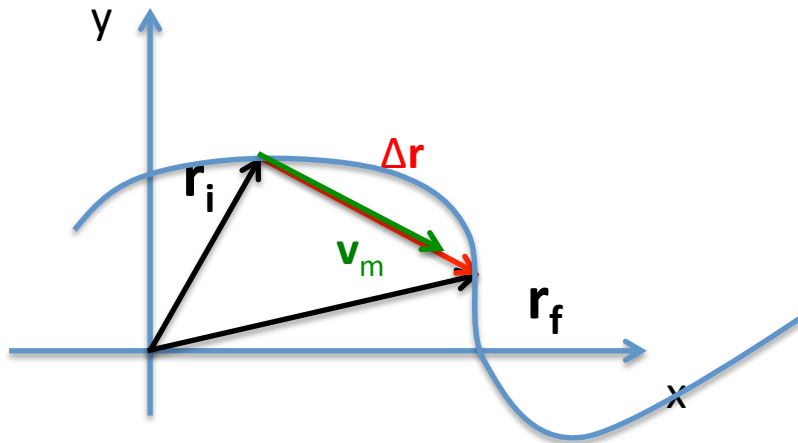
$$(V_x, V_y) \equiv \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

Ovvero, le componente lungo l'asse x della velocita` ( $v_x$ ) e` semplicemente la derivata (dx/dt), e cosi` per le altre componenti.

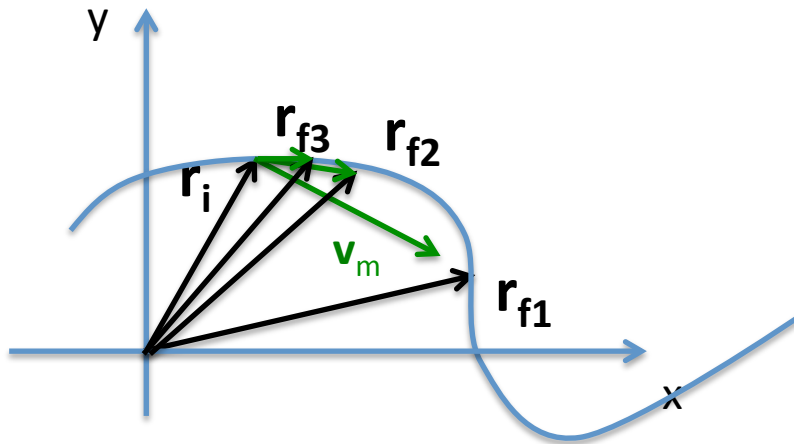
In pratica, se si scompone il moto lungo i tre assi coordinati, allora si tratta di ripetere per ciascuna componente quello che abbiamo gia` imparato per un moto lungo un asse.

VETTORE VELOCITA' ISTANTANEA e TRAIETTORIA

La particella durante il suo moto descrive una **traiettoria**, che per definizione è l'insieme dei punti occupati da un corpo durante il suo moto (quella in blu nel disegno)



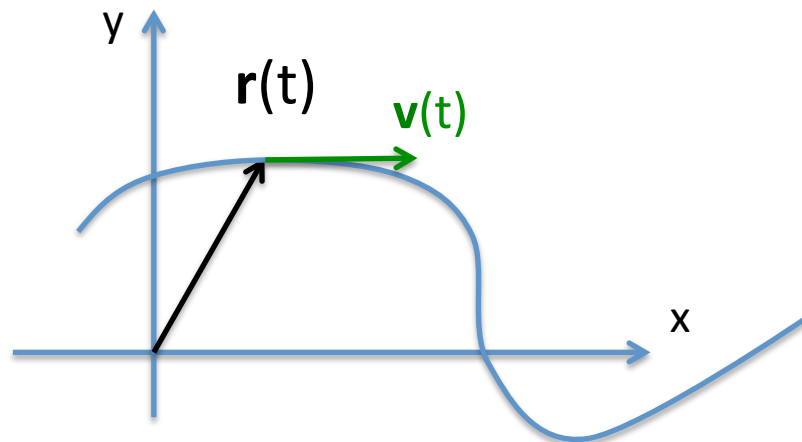
Cosa succede per la velocità media man mano che consideriamo intervalli di tempo Δt via via sempre più piccoli? Lo si può vedere dalla figura qui sotto:



VETTORE VELOCITA' ISTANTANEA e TRAIETTORIA

Man mano che osserviamo il moto per intervalli di tempo via via sempre più piccoli, ci accorgiamo che la velocità media tende ad essere un vettore tangente alla traiettoria. Siccome man mano che consideriamo intervalli di tempo via via sempre più piccoli la velocità media definisce la velocità istantanea possiamo concludere la seguente semplice ma importante proprietà della velocità istantanea:

Ad un determinato istante la velocità vettoriale $\mathbf{v}(t)$ è tangente alla traiettoria della particella nel punto occupato dalla particella in quell'istante (e la velocità punta lungo la direzione del moto).



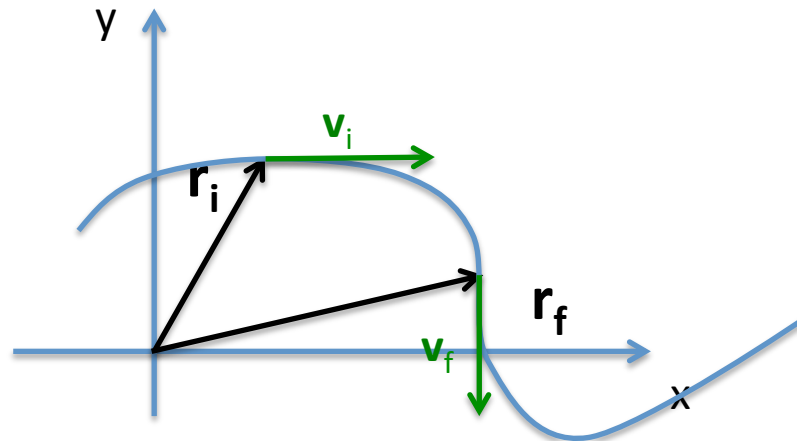
VETTORE ACCELERAZIONE MEDIA

In modo analogo al caso unidimensionale definiamo un'accelerazione vettoriale media come il rapporto tra la variazione del **vettore** velocità e l'intervallo di tempo entro cui si è verificata tale variazione

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

dove $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ è la differenza tra la velocità finale $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}(t_f)$ e la velocità iniziale $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(t_i)$.

Quindi risulterà che l'accelerazione media è un vettore con la stessa direzione e verso della variazione della velocità.



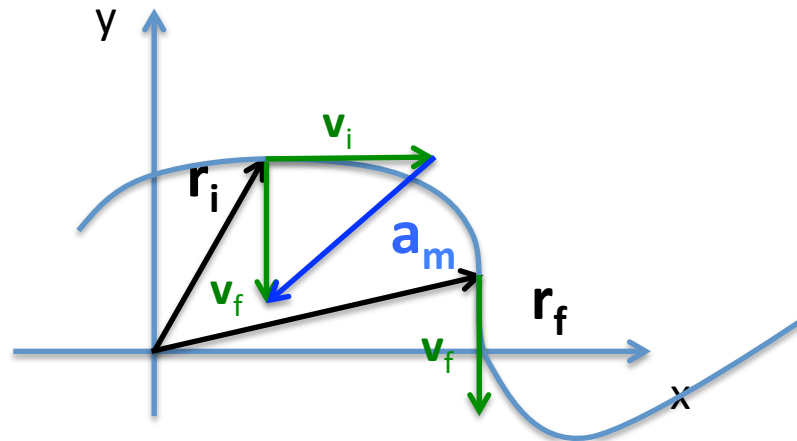
VETTORE ACCELERAZIONE MEDIA

In modo analogo al caso unidimensionale definiamo un'accelerazione vettoriale media come il rapporto tra la variazione del **vettore** velocità e l'intervallo di tempo entro cui si è verificata tale variazione

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

dove $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ è la differenza tra la velocità finale $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}(t_f)$ e la velocità iniziale $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(t_i)$.

Quindi risulterà che l'accelerazione media è un vettore con la stessa direzione e verso della variazione della velocità.



VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Definiamo l'accelerazione vettoriale istantanea (o semplicemente accelerazione vettoriale) come il limite per intervalli di tempo via via più piccoli (al limite infiniteismi) della accelerazione media

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

In modo analogo al caso unidimensionale l'accelerazione istantanea è quindi la derivata rispetto al tempo della velocità $\mathbf{v}(t)$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Esattamente come fatto per la velocità vettoriale istantanea, calcolarsi questa derivata vuol dire calcolarsi le derivate rispetto al tempo per ciascuna componente della velocità

$$(a_x, a_y) \equiv \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right)$$

Ovvero, la componente lungo l'asse x dell'accelerazione (a_x) è semplicemente la derivata rispetto al tempo della componente lungo x della velocità (dv_x/dt), e così per le altre componenti.

VEETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Ricordando che

$$(v_x, v_y) \equiv \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

si ha che

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

ovvero

$$(a_x, a_y) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

Ovvero, la componente lungo l'asse x dell'accelerazione (a_x) si può ottenere anche come la derivata seconda della coordinata x fatta rispetto al tempo due volte e così per le altre componenti.