CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE

- MECCANICA: studio del moto di uno o piu` corpi

- CINEMATICA: studio del moto di un corpo *indipendentemente* dalle sue cause
  (esempi:
  spostamento, velocita` media, velocita` istantanea).

- DINAMICA: studio delle cause del moto di un corpo (FORZE)

CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE

- Moto unidimensionale: il moto avviene lungo una retta (verticale, orizzontale, inclinata)

- per un ``punto'' materiale:

• oggetti di dimensioni sufficientemente piccole (dipende dalle posizioni e dimensioni degli altri corpi; es.: se considero la rotazione della Terra attorno al Sole posso trattare la Terra in prima approssimazione come un corpo puntiforme; non posso se considero il moto di rotazione della Terra attorno al suo asse)

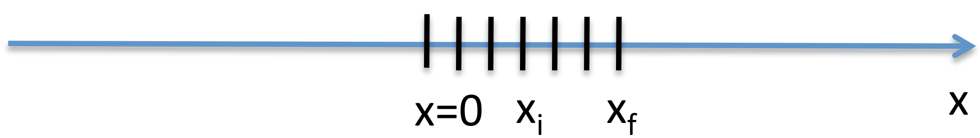
• oggetti che si muovono *come* un corpo puntiforme: tutte le sue parti si muovono rigidamente nella sessa direzione e con la stessa velocita`.

CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE

- SISTEMA DI COORDINATE: per definire la posizione dell' oggetto in esame.

 - Stabilisco un verso della retta, che chiamo verso positivo.
 - Considero un punto arbitrario come origine sulla retta, che indichero` con x=0
 - stabilisco una unita` di misura per le distanze (il metro).

Allora la posizione di un corpo sulla retta rispetto all' origine e` data dalla "distanza" del corpo dall'origine (la coordinata x misurata in metri).
Tale coordinata x e` >0 se il corpo si trova a destra dell'origine, x e` <0 se si trova a sinistra dell'origine.



Supponiamo che un corpo si trovi all'istante t_i nella posizione x_i: $t_i \rightarrow x_i=x(t_i)$
Dopo l'intervallo di tempo $\Delta t=t_f-t_i$ si trova nella posizione t_f: x_f: $t_f \rightarrow x_f=(t_f)$

<u>N.B.</u>: verso ed origine sono arbitrari, ***ma una volta scelti bisogna essere coerenti con la scelta fatta durante i calcoli***

CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE

- Definisco lo ***spostamento*** come la quantita`

$$\Delta x = x_f - x_i$$

N.B.: lo spostamento puo` essere sia >0 che <0 a seconda che lo spostamento avvenga rispettivamente nel verso concorde a quello fissato sull’assse x o nel verso opposto

Esempio: se $x_f=-5$ m e $x_i=2$ m, allora $\Delta x=-5\text{ m}-(2\text{ m})=-7$ m, e` chiaro che il corpo si e` mosso nel verso opposto a quello fissato sull’asse x.

- <u>Legge oraria del moto</u>: la posizione del corpo lungo la retta cambiera` da istante di tempo ad istante di tempo. Quindi ad ogni istante t potro` associare la sua coordinata x(t):

  $t \rightarrow x(t)$

  e quindi la coordinata x sara` una funzione del tempo. Tale funzione x(t) si chiama LEGGE ORARIA DEL MOTO.

CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE: VELOCITA` MEDIA

- VELOCITA` MEDIA: rapporto tra lo spostamento effettuato nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ e l'intervallo di tempo Δt

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

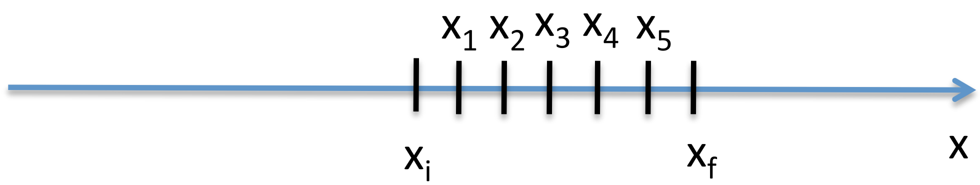
Unita` di misura nel S.I.: m/s. Le sue dimensioni sono $[v_m]=L/T$.

v_m non da solo informazioni su quanto velocemente si muove un oggetto, ma da anche informazioni sul verso nel quale si muove. Infatti Δt e` sempre >0, ma $\Delta x$ puo` essere >0 o <0 a seconda di un moto che avviene, rispettivamente, nel verso concorde o nel verso opposto rispetto a quello fissato sull'assse x. **Quindi anche v_m puo` essere >0 o <0 a seconda che il moto avvenga, rispettivamente, nel verso concorde o nel verso opposto rispetto a quello fissato sull'assse x.**

Nota: Come sara` chiaro quando introdurremo i vettori, il segno della velocita` (o dell'accelerazione) e` legato al fatto che in realta` velocita` e accelerazione sono dei vettori le cui componenti possono essere >0 o <0. Solo che nel caso unidimensionale si puo` fare a meno di ``scomodare'' i vettori, perche` il moto avviene su una retta che puo` essere percorsa o in un verso o nel verso opposto.

CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE: VELOCITA` ISTANTANEA

- La velocita` media non da una descrizione accurata del moto di una particella. Per avere una descrizione accurata dovrei conoscerla per intervalli di tempo via via piu` piccoli. L'ideale sarebbe conoscere la velocita` istante per istante.



Considero quindi dei sotto-intervalli di tempo via via sempre piu` piccoli e per ciascuno di questi calcolo la velocita` media:

$$v_m^{(1)} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x_1 - x_i}{t_1 - t_i}; \quad v_m^{(2)} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}; \quad v_m^{(3)} = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2};$$

e cosi` via fino all'ultimo sotto-interavallo

Per conoscere la velocita` ad ogni istante devo via via ridurre gli intervalli di tempo.

CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE: VELOCITA` ISTANTANEA

- Allora si definisce come velocita` istantanea (o semplicemente velocita`):

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

Ovvero, detto in parole:
la velocita` istantanea e` il limite di Δx/Δt
per Δt che tende a zero.

<u>In pratica</u>: devo calcolare (o misurare) la velocta` media  Δx/Δt per intervalli di tempo sempre piu` piccoli, tendenti allo zero (intervalli infinitesimi)

N.B.1: dimensioni e unita` di misura sono le stesse della velocita` media.

N.B.2: v puo essere sia >0 che <0. Il siginificato del segno e` lo stesso di quello spiegato per la velocita` media

N.B.3.: la velocita` media si riferisce ad un intervallo di tempo finito, la velocita` istantanea si riferisce ad un istante di tempo specifico, e in genere e` diversa da istante ad istante. Per cui, istante per istante potremo associare a ciascun istante di tempo un ben determinato valore della velocita` : t→ v(t).

CINEMATICA DI UN PUNTO MATERIALE: VELOCITA` ISTANTANEA

La definizione di velocita` istantanea corrisponde in matematica alla definizione di derivata:

$$\boxed{\mathrm{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

ovvero, detto in parole: la velocita` e` la derivata rispetto al tempo della coordinata x(t)

MOTO RETTILINEO UNIFORME

- Supponete che un corpo si muova con velocita` costante, ovvero con una velocita` che non dipende dal tempo (la velocita` ha lo stesso valore fissato per ogni istante, per esempio v=0.5 m/s.)

  Potremo scrivere v=costante=v_0, dove v_0 denota il valore costante della velocita`.

- Ci domandiamo: e` possibile ricavare da questa informazione qual e` la legge oraria del moto in questo caso?

  Si: la risposta e`

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0).$$

dove x_0 e` la posizione iniziale del corpo, e t_0 l'istante iniziale.

- <u>**Procedura: si veda ne due pagine seguenti.**</u>

Prendiamo la relazione

$$v(t) = v_0\,. \tag{1}$$

Sappiamo che, siccome $v = dx/dt$ possiamo scrivere

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v_0\,. \tag{2}$$

Allora prendiamo l'integrale sia a sinistra che a destra dell'uguale tra un istante iniziale t_i e un generico istante finale t (se vale l'uguaglianza sappiamo che anche i due integrali devono essere uguali).

L'integrale a sinistra dell'uguale dà:[1]

$$\int_{t_i}^{t} \frac{dx}{dt}\, dt = x(t)\Big|_{t_i}^{t} = x(t) - x(t_i)\,. \tag{3}$$

Integro a destra dell'uguale:[2]

$$\int_{t_i}^{t} v_0 dt = v_0 \int_{t_i}^{t} dt = v_0(t - t_i)\,, \tag{4}$$

dove ho usato la proprietà degli integrali per cui se sto integrando una costante (nel nostro caso v_0 che non dipende appunto dal tempo t) posso, come si dice, "portare fuori dall'integrale" tale costante. A questo punto uguagliamo i due integrali:

$$x(t) - x(t_i) = v_0(t - t_i)\,, \tag{5}$$

ovvero

$$x(t) = x(t_i) + v_0(t - t_i). \tag{6}$$

Questa equazione fornisce la legge oraria del moto per un moto rettilineo uniforme, ovvero esprime come la coordinata x di un corpo varia al variare del tempo t.

---

[1] Il risultato della Eq. (4) dipende dal fatto che per calcolare l'integrale di una funzione, diciamo $f(t)$ (nel nostro caso rispetto alla variabile tempo t) devo trovare quella funzione $g(t)$ la cui derivata rispetto al tempo t da la funzione $f(t)$ che voglio integrare. Devo poi valutare tale funzione $g(t)$ tra i due estremi di integrazione (ovvero fare la differenza $[g(t) - g(t_i)]$). Nel caso specifico della equazione (4) la funzione da integrare è proprio la derivata di $x(t)$ rispetto al tempo t, per cui la funzione $g(t)$ è proprio $x(t)$.

[2] Si noti che la notazione matematica rigorosa nello scrivere questi integrali sarebbe, per esempio per l'integrale nella Eq.(4), $\int_{t_i}^{t} \frac{dx}{dt'}\, dt'$, solo che per semplicità di notazione invece che scrivere t' scriviamo semplicemente t anche dentro all'integrale.

Spesso l'istante iniziale t_i viene indicato con t_0, e quindi $x(t_i)$ viene indicato con $x(t_0) = x_0$. Così facendo possiamo riscrivere la Eq. (14) come

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0).} \tag{7}$$

N.B.: si noti che spesso si può fare la scelta per cui l'istante iniziale $t_0 = 0$ per cui

$$x(t) = x_0 + v_0 t \tag{8}$$

N.B.: la procedura descritta qui sopra e` quella che trovate (anche se con meno dettagli) nel paragrafo 2.8 a pag. 22-23 del libro.

ACCELERAZIONE MEDIA E ISTANTANEA

- ACCELERAZIONE MEDIA:
  rapporto tra la variazione della velocita` Δv che si verifica nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$ e l'intervallo di tempo Δt

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

- ACCELERAZIONE ISTANTANEA (o piu` semplicemente accelerazione):
  si definisce in modo del tutto analogo a quanto fatto per la velocita` istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

N.B.: le dimensioni fisiche dell'accelerazione media ed istantanea sono $L/T^{2;}$
l' unita` di misura e` m/s^2.

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

La definizione di accelerazione istantanea corrisponde alla derivata della velocita` v(t) rispetto al tempo.

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}}$$

Ricordando che la velocita` e` a sua volta la derivata della coordinata x rispetto al tempo, ovvero v(t)=dx/dt, allora possiamo anche scrivere

$$\boxed{a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}}$$

Ovvero l'accelerazione si puo` anche ottenere derivando due volte la coordinata x(t) rispetto al tempo t.

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

- Supponete adesso che un corpo si muova con accelerazione costante, ovvero con una accelerazione che non dipende dal tempo (a ha lo stesso valore fissato per ogni istante, per esempio a=5 m/s^2.)

Potremo scrivere a=costante

- Ci domandiamo: e` possibile ricavare da questa informazione qual e` la legge oraria del moto in questo caso e la velocita`? La risposta e` si e il riassunto dei risultati e`:

$$a = costante$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0).$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 .$$

dove t_0 e` l'istante iniziale, $x_0$ la posizione iniziale del corpo, e e $v_0$ la velocita` iniziale del corpo.

- **<u>Procedura: si veda ne due pagine seguenti.</u>**

Consideriamo adesso il moto uniformemente accelerato. In questo caso un corpo puntiforme si muove con accelerazione costante (ovvero che non dipende dal tempo). Innanzitutto ricaviamo un'espressione della velocità in funzione del tempo (ovvero $v(t)$). Matematicamente il procedimento è identico a quello già fatto per il moto rettilineo uniforme (nei passaggi matematici basta che sostituiate v_0 con a e $x(t)$ con $v(t)$).
Sappiamo che

$$\frac{dv}{dt} = a = costante\,. \tag{9}$$

Allora prendiamo l'integrale sia a sinistra che a destra dell'uguale tra un istante iniziale t_i e un generico istante finale t.

L'integrale a sinistra dell'uguale dà:

$$\int_{t_i}^{t} \frac{dv}{dt}\, dt = v(t)\Big|_{t_i}^{t} = v(t) - v(t_i)\,. \tag{10}$$

L'integrale a destra

$$\int_{t_i}^{t} a dt = a \int_{t_i}^{t} dt = a(t - t_i)\,, \tag{11}$$

dove ho usato la proprietà degli integrali per cui se sto integrando una costante (nel nostro caso l' accelerazione a che non dipende appunto dal tempo t) posso, come si dice, "portare fuori dall'integrale" tale costante. Pertanto uguagliando la (10) e la (11) otteniamo una prima legge importante:

$$v(t) = v(t_i) + a(t - t_i). \tag{12}$$

Data questa legge siamo in grado di ottenere la legge oraria del moto. Intanto mi ricordo che

$$\frac{dx}{dt} = v(t)\,. \tag{13}$$

A questo punto integro la Eq. (12) sia a sinistra che a destra dell'uguale tra un istante iniziale t_i e un generico istante finale t. Integrando a sinistra ottengo come al solito:

$$\int_{t_i}^{t} v(t)\, dt = \int_{t_i}^{t} \frac{dx}{dt}\, dt = x(t)\Big|_{t_i}^{t} = x(t) - x(t_i)\,. \tag{14}$$

L'integrale a destra dell'uguale nella Eq. (12) dà:

$$\int_{t_i}^{t} [v(t_i) + a(t - t_i)]\, dt = v(t_i) \int_{t_i}^{t} dt + a \int_{t_i}^{t} (t - t_i) dt = v(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2} a(t - t_i)^2\,. \tag{15}$$

Uguagliando la (14) con la (15) otteniamo la legge oraria del moto:

$$x(t) = x(t_i) + v(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2} a(t - t_i)^2\,. \tag{16}$$

Spesso l'istante iniziale t_i viene indicato con t_0, e quindi $x(t_i)$ viene indicato con $x(t_0) = x_0$ e $v(t_i)$ con $v(t_0) = v_0$. Pertanto, riepilogando si ha:

$$a = costante \tag{25}$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0). \tag{26}$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2\,. \tag{27}$$

Nel caso in cui si faccia la scelta per cui l'istante iniziale $t_0 = 0$

$$a = costante \tag{28}$$

$$v(t) = v_0 + at \tag{29}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,. \tag{30}$$

N.B1.: Una possibile semplice verifica che i risultati ottenuti sono corretti consiste, per esempio, nel derivare rispetto al tempo la (26), ottenendo così:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a\,, \tag{31}$$

come ci si doveva aspettare visto che l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo.

N.B.2: se ci riduciamo al caso particolare $a = 0$ dalla legge oraria del moto (27) otteniamo esattamente la Eq. (7)

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)\,, \tag{32}$$

ovvero la legge oraria di un moto rettilineo uniforme: di nuovo è quello che ci si aspetta visto che $a = dv/dt = 0$ equivale a dire che la velocitın questo caso particolare rimane costante.