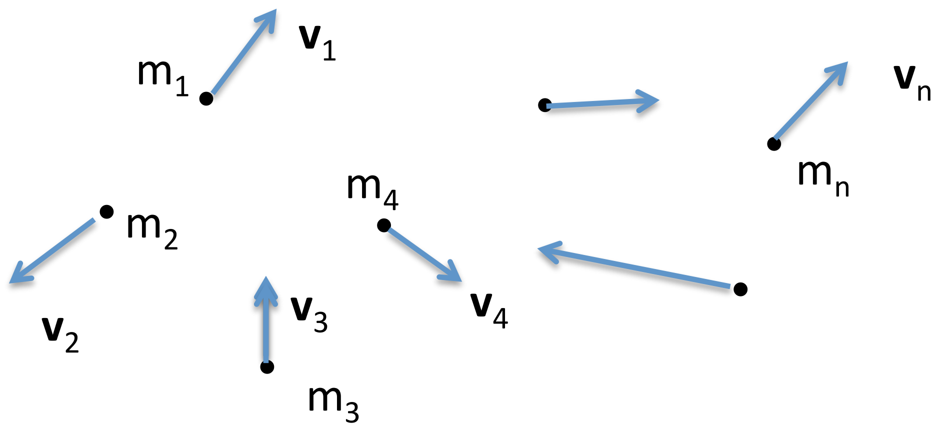
DINAMICA DEI SISTEMI

- Vogliamo estendere le leggi della dinamica viste fin qui per corpi puntiformi al caso di ***sistemi costituiti da piu` particelle***.

- Quello che vedremo sara` utile per poter vedere quali sono le leggi della dinamica per sistemi materiali estesi (per esempio corpi solidi, che possono essere sempre pensati come un insieme di piu` elementi ciascuno con la sua massa dm).

DINAMICA DEI SISTEMI

- Consideriamo un insieme di n punti materiali. Ciascuno avra` la sua massa, la sua velocita` e la sua quantita` di moto $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$



- Per ciascuna di queste particelle varra` la II legge di Newton

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

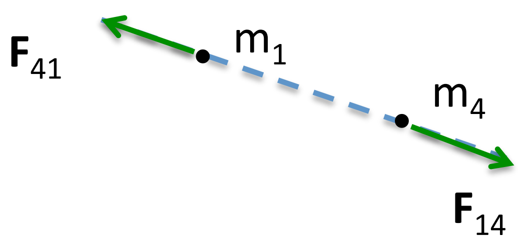
si tratta di n-equazioni vettoriali per le n-particelle. E` un problema esetremamente complesso (qui i=1,2,……n e $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ e` la quantita di moto della particella i-esima)

- **Per cui scopo delle seguenti lezioni sara` quello di derivare delle equazioni che permettano di ottenere delle informazioni sul moto del sistema diciamo cosi` nel suo insieme**

DINAMICA DEI SISTEMI: TIPI DI FORZE

- Sul sistema possono agire sia delle ***forze esterne al sistema***, che delle ***forze interne al sistema***.

  * Le ***forze interne*** sono le forze che ciascuna particella esercita sulle altre; sono costituite dall'azione e dalla rispettiva reazione (secondo la III legge della dinamica) con cui coppie di particelle interagiscono tra loro



ovvero forze che sono l'una l'opposto dell'altra $\mathbf{F}_{14}=-\mathbf{F}_{41}$ e *con la stessa retta di applicazione*

  * ***Le forze esterne*** sono quelle forze che sono esercitate invece da agenti esterni al sistema
  Tipico esempio: la forza peso che agisce su ciascuna particella esercitata dalla forza di attrazione gravitazionale da parte della Terra.

II LEGGE DI NEWTON PER SISTEMI DI PIU` PARTICELLE

- Ciascuna particella avra` la sua quantita` di moto **$\mathbf{p}_i$**= m_i **$\mathbf{v}_i$**.
  Pertanto viene naturale definire **la quantita` di moto totale del sistema** come la somma delle quantita` di moto delle singole particelle

$$\vec{P}^{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots\ldots + \vec{p}_n = m_1\vec{\mathrm{v}}_1 + m_2\vec{\mathrm{v}}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{\mathrm{v}}_n$$

- Adesso deriviamo rispetto al tempo sia a sinistra che a destra dell'uguale:

$$\frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} + \ldots\ldots + \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = \vec{F}^{TOT}$$

dove **$\mathbf{F}_i$** e` la forza (totale) agente sulla i-esima particella, e **$\mathbf{F}^{TOT}$** e` la risultante delle forze agenti sul sistema, ovvero la somma di tutte le forze che agiscono sulle diverse particelle.

- Vediamo allora gia` da questa equazione una chiara analogia con la II legge di Newton per una singole particella

II LEGGE DI NEWTON PER SISTEMI DI PIU` PARTICELLE

- Ma nel caso dei sitemi di piu` particelle c'e` una ***semplificazione importante*** per la II legge di Newton:

Infatti nella equazione $\dfrac{d\vec{P}^{TOT}}{dt} = \vec{F}^{TOT}$

a destra dell'uguale stiamo sommando su tutte le forze che agiscono sul sistema. ***Come abbiamo detto ci sono sia forze interne che esterne***. Ma le forze interne al sistema sono coppie di azione e reazione e pertanto nella somma che si deve fare ***per calcolare F^{TOT} la somma delle forze interne si annulla*** (devo fare le somme di forze interne che per ciasuna coppia di punti sono l'una l'opposta dell'altra).

- Pertanto otteniamo il primo risultato importante

$$\boxed{\vec{F}^{TOT}_{est.} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt} \qquad \text{II Legge di Newon per un sistema di particella}}$$

dove $\vec{F}^{TOT}_{est.}$ e` la somma delle *SOLE* forze esterne agenti sul sistema, mentre non entrano in gioco le forze interne al sistema.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA` DI MOTO TOTALE

- Dal risultato appena visto

$$\vec{F}_{est.}^{TOT} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt}$$

segue allora un principio molto importante in fisica:

Se la risultante delle forze esterne e` nulla, $\vec{F}_{est.}^{TOT} = 0$ , allora la quantita` di moto totale del sistema si conserva (cioe` rimane costante nel tempo durante il moto)

** Infatti cosa vuol dire che $\vec{F}_{est.}^{TOT} = 0$? Dal momento che $\vec{F}_{est.}^{TOT} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt}$ allora

$$\frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \vec{P}^{TOT} = \text{cost.}$$

visto che se la derivata di una certa grandezza rispetto al tempo e` zero vuol dire che quella grandezza non varia nel tempo, ovvero rimane costante.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA` DI MOTO TOTALE

- ***N.B.1:*** si noti che quello che si conserva e` un vettore, il vettore quantita` di moto totale, quindi questo vettore non cambia in modulo, direzione, e verso.

  Da un punto di vista pratico (dei calcoli) dire che

$$\vec{P}^{TOT} = cost.$$

equivale a TRE equazioni di conservazione, una per ciascuna componente della quantita` di moto totale lungo i tre assi x,y,z (una volta fissato un sistema di rierimento). Ovvero:

$$P_x^{TOT} = cost.$$

$$P_y^{TOT} = cost.$$

$$P_z^{TOT} = cost.$$

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA` DI MOTO TOTALE

- ***N.B.2:*** dato che

$$\vec{F}^{TOT}_{est.} = \frac{d\vec{P}^{TOT}}{dt}$$

se anche solo una delle componenti di $\vec{F}^{TOT}_{est.}$ e` zero, allora la rispettiva componente della quantita` di moto si conserva.

Per esempio se

$$F^{TOT}_{est.x} = 0$$

allora

$$P^{TOT}_{x} = cost.$$

Momento angolare e momento di una forza

- Ritorniamo per un momento alla dinamica di una singola particella. Definiamo il momento della quantita` di moto della particella, detto anche ***momento angolare***.

- Supponiamo che una particella si trovi a un certo istante nel punto P e si stia muovendo con velocita` **v** e quindi ha quantita` di moto **p**=m**v**. Consideriamo un qualsiasi punto nello spazio (consideriamolo fisso per semplicita`) e indichiamolo con Ω (Omega) (si chiama "polo").

  Allora ***il momento angolare della particella*** e` la quantita`

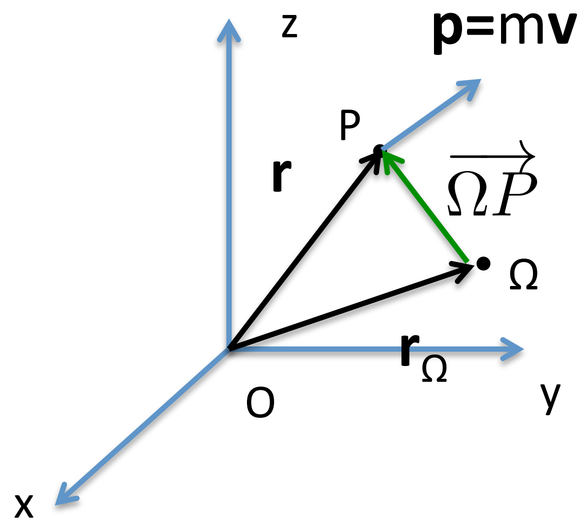
$$\boxed{\vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}}$$

ove il proddotto vettoriale tra il vettore $\overrightarrow{\Omega P}$, che individua la posizione della particella rispetto al polo Omega (ovvero il vettore che parte da Omega e arriva alla particella), e la quantita` di moto $\vec{p}$ della particella.

Momento angolare e momento di una forza

- ***Qual e` il significato fisico di questa quanitta` e quando serve?***

Questa quantita` serve per descrivere dei ***moti di rotazione***. Lo si capisce se calcolate qual e` la direzione e verso del momento angolare in base alla definizione di prodotto vettoriale tra due vettori.



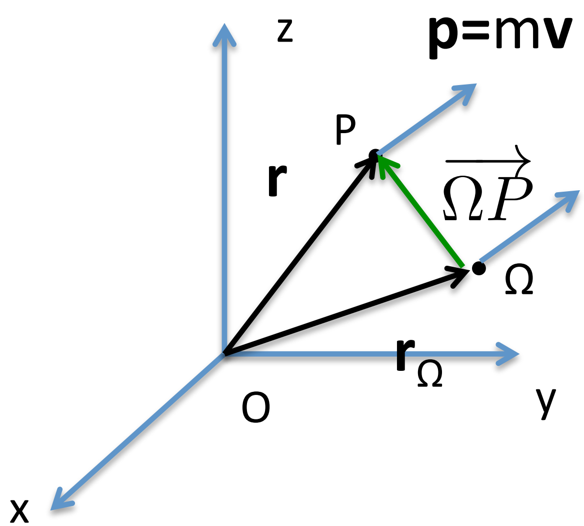
$$\boxed{\vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}}$$

Si vede allora che il momento angolare e` come se descrivesse la rotazione istantanea della particella attorno al polo Ω scelto

Momento angolare e momento di una forza

- ***Qual e` il significato fisico di questa quanitta` e quando serve?***

Questa quantita` serve per descrivere dei ***moti di rotazione***. Lo si capisce se calcolate qual e` la direzione e verso del momento angolare in base alla definizione di prodotto vettoriale tra due vettori.



$$\boxed{\vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}}$$

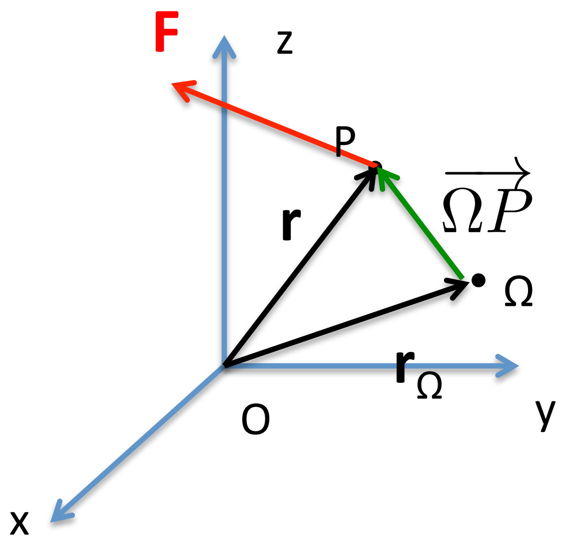
Si vede allora che il momento angolare e` come se descrivesse la rotazione istantanea della particella attorno al polo Ω scelto

Momento angolare e momento di una forza

- ***Momento di una forza***

  Supponiamo che sulla particella in P agisca una forza **F.**

  Allora si definisce come momento di **F** (rispetto al polo Ω) il prodotto vettoriale tra il vettore $\overrightarrow{\Omega P}$ e la forza **F.**



$$\vec{\tau} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{F}$$

Momento angolare e momento di una forza

- La II Legge di Newton per una particella si puo` anche esprimere in termini del momento angolare e del momento della risultante delle forze che agiscono sulla particella. ***Risulta infatti che vale la seguente legge (nel caso di un polo fisso)***

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}}$$

In parole: il momento della forza risultante **τ** (rispetto al polo Ω) e` uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare (rispetto al medesimo polo).

- N.B. per una dimostrazione si veda la slide dopo

- Per la singola particella questa equazione non e` altro se non un modo diverso di riscrivere la II Legge di Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si noti la chiara analogia: cosi` come la variazione della quantita` di moto nel tempo e` data dalla forza **F,** cosi` la variazione del **momento della quantita` di moto p** (o momento angolare) e` data dal **momento della forza τ**

Dimostrazione del risultato precedente

Consideriamo il momento della quantità di moto rispetto al polo Ω

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p} \tag{65}$$

e deriviamolo rispetto al tempo. Otteniamo

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\left[\overrightarrow{\Omega P} \times \vec{p}\right]}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\Omega P}}{dt} \times \vec{p} + \overrightarrow{\Omega P} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\,. \tag{66}$$

Ma

$$\overrightarrow{\Omega P} = \vec{r} - \vec{r}_\Omega\,, \tag{67}$$

quindi la derivata rispetto al tempo di questo termine da

$$\frac{d\overrightarrow{\Omega P}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} = \vec{v}\,, \tag{68}$$

dal momento che abbiamo ipotizzato che il polo Ω è fisso e quindi $d\vec{r}_\Omega/dt = 0$. A questo punto però notate che il primo termine a destra dell'uguale nella Eq. (66) è zero, ovvero

$$\frac{d\overrightarrow{\Omega P}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m(\vec{v} \times \vec{v}) = 0\,. \tag{69}$$

Questo perchè $\vec{p} = m\vec{v}$ è un vettore parallelo alla velocità $\vec{v}$, e ricordate che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è zero.

Dimostrazione del risultato precedente

Pertanto la Eq. (66) risulta essere

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \overrightarrow{\Omega P} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\,. \tag{70}$$

Infine basta ricordarsi della II legge di Newton per una particella espressa tramite la quantità di moto della particella

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,, \tag{71}$$

dove $\vec{F}$ è la risultante delle forze agenti sulla particella. Pertanto si ha

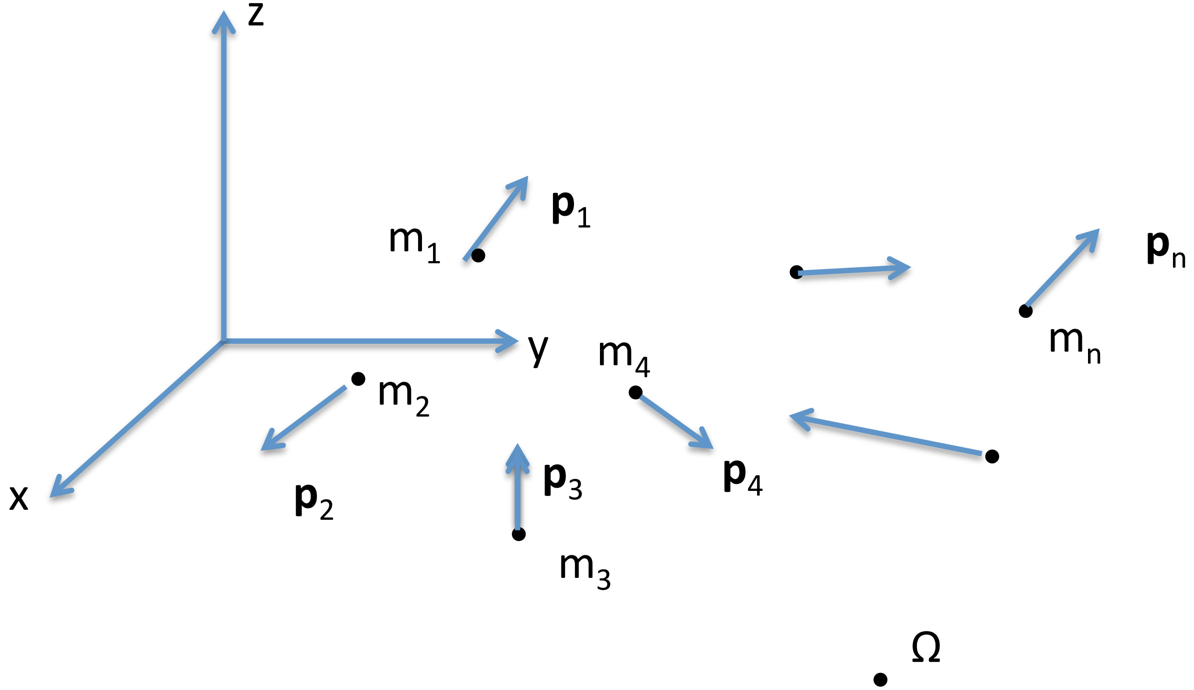
$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \overrightarrow{\Omega P} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{\Omega P} \times \vec{F} = \vec{\tau}\,, \tag{72}$$

il che dimostra il risultato anticipato prima.

Estensione ad un sistema di piu` particelle

- Definiamo il ***momento angolare totale*** come la somma di tutti i momenti angolari di tutte le particelle (rispetto ad un polo fisso Ω).

$$\vec{L}^{tot} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + ... + \vec{\ell}_n$$



Estensione ad un sistema di piu` particelle

- Definiamo il momento angolare totale come la somma di tutti i momenti angolari di tutte le particelle (rispetto ad un polo fisso Ω).

$$\vec{L}^{tot} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + ... + \vec{\ell}_n$$

- Adesso deriviamo rispetto al tempo sia a sinistra che a destra dell'uguale

$$\frac{d\vec{L}^{tot}}{dt} = \frac{d\vec{\ell}_1}{dt} + \frac{d\vec{\ell}_2}{dt} + \frac{d\vec{\ell}_3}{dt} + ... + \frac{d\vec{\ell}_n}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + ...\vec{\tau}_n$$

A questo punto viene naturale definire come ***momento totale delle forze*** che agiscono sul sistema la somma dei momenti delle forze che agiscono sul sistema

$$\vec{\tau}^{tot} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + ...\vec{\tau}_n$$

- ***Pertanto otteniamo un secondo risultato importante***

$$\vec{\tau}^{tot} = \frac{d\vec{L}^{tot}}{dt}$$

Estensione ad un sistema di piu` particelle

- Ma come per l' estensione della II Legge di Newton ad un sistema di particelle, anche per questa equazione vale una ***importante semplificazione:***

  per calcolare il momento totale delle forze $\vec{\tau}^{tot}$ ***le uniche forze che contano sono solo quelle esterne al sistema.***

Ovvero si avra` allora

$$\boxed{\vec{\tau}_{est}^{tot} = \frac{d\vec{L}^{tot}}{dt}}$$

Dove con $\vec{\tau}_{est}^{tot}$ indichiamo appunto la somma di tutti i momenti delle ***forze esterne.***

- N.B.: per capire perche` anche in questo caso contano solo le forze esterne si veda esercizio svolto in classe su ``coppie di forze''.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE TOTALE

- Se il momento totale delle forze esterne (rispetto a un polo Ω) e` nullo

$$\vec{\tau}^{tot}_{est} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{L}^{tot} = costante$$

(dove **L**^{TOT} momento angolare totale calcolato rispetto allo stesso polo Ω).

- N.B1.: valgono le stesse considerazioni fatte sulla conservazione della quantita` di moto totale.
  Ovvero quello che si conserva e` un vettore e quindi $\vec{L}^{tot} = costante$ equivale a tre leggi di conservazione

$$L^{tot}_x = costante \qquad L^{tot}_y = costante \qquad L^{tot}_z = costante$$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE TOTALE

- N.B.2: se anche sola una componente del momento totale delle forze esterne e` nulla allora vale una legge di conservazione per la corrispondente componente del momento angolare totale.

  Per esempio: se

$$\tau_{est\,x}^{tot} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$L_x^{tot} = costante$$