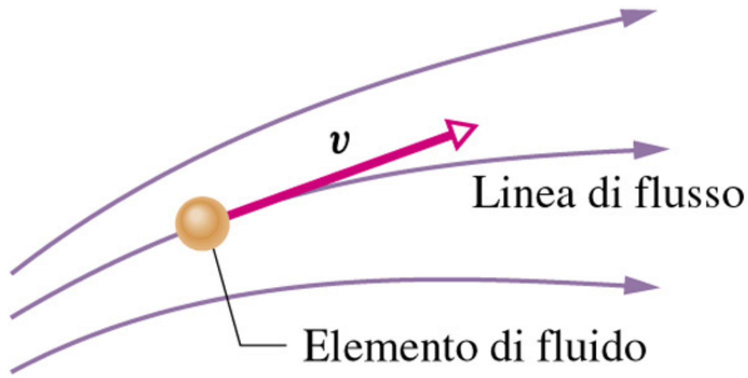
FLUIDODINAMICA

- Partiamo dalla situazione piu` semplice: ***fluidi perfetti***
  quindi no viscosita` (ovvero no sforzi di taglio), no conduzione termica,
  e fluidi incompressibili e quindi con densita` che non varia
  (ovvero denistà costante nel tempo e uniforme nello spazio).

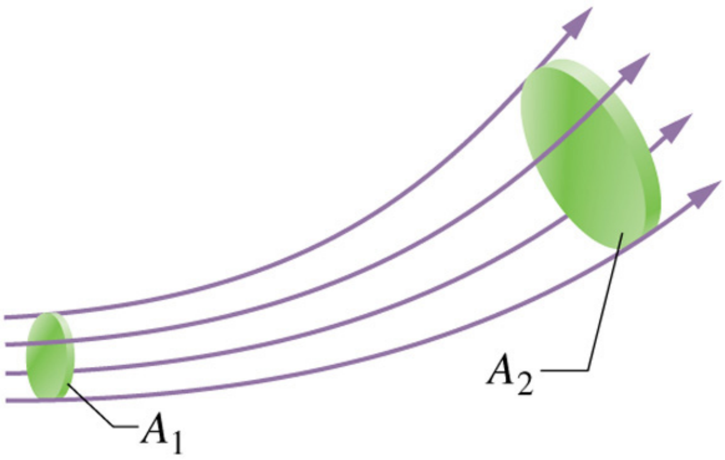
- ***Linee di corrente*** (o a volte linee di flusso): sono le traiettorie descritte dagli elementi di fluido (in ogni punto la velocita` risulta tangente alla linea di corrente).



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

FLUIDODINAMICA

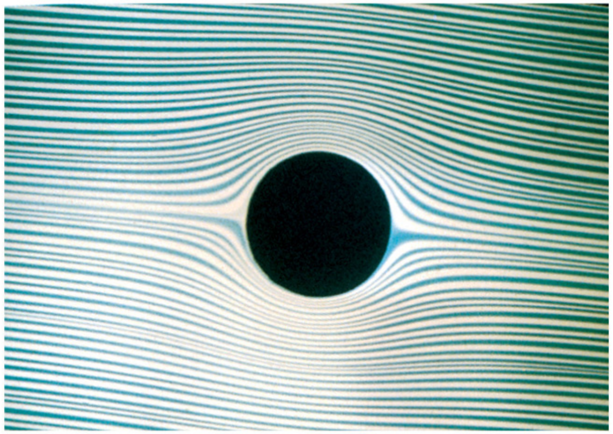
- ***Tubo di flusso:***
  se consideriamo una linea chiusa per ciascuno dei punti di questa passa una linea di flusso; l'insieme di queste linee di flusso definisce una superficie tubolare che racchiude un insieme di linee di flusso che si chiama tubo di flusso.
  (nel caso di un tubo di flusso a sezione molto piccola si parla di ***filetto di fluido elementare)***.



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

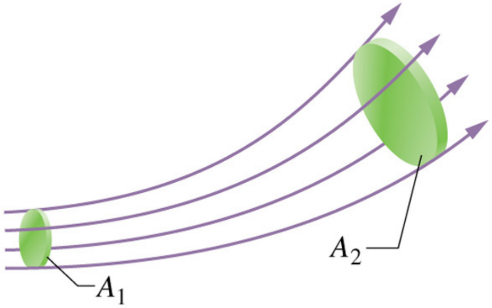
FLUIDODINAMICA

- E` facile visualizzare le linee di flusso immettendo nel fluido in movimento dei sottili filetti di un altro liquido colorato.



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

- Laddove la densita` di linee di flusso (numero delle linee per unita` di sezione che vi passano attraverso) e` maggiore, maggiore e` la velocita` del fluido.



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

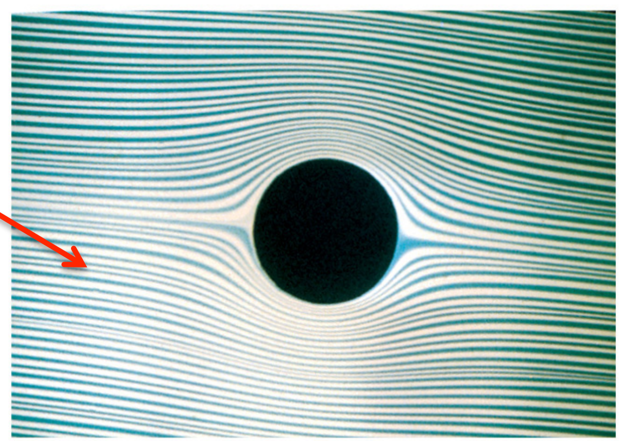
FLUIDODINAMICA

- **Regime laminare/regime turbolento**

nei fluidi reali (quindi con viscosita`) per velocita` piu` grandi di una certa velocita` critica i vari filetti di fluido tendono a mescolarsi gli uni con gli altri, portando anche alla formazione di vortici (per esempio in prossimita` di ostacoli): si parla allora di ***regime turbolento.***

***Per velocita` piu` basse della velocita` critica,*** i vari filetti di fluido elementari mantengono la loro individualita` e procedono sostanzialmente in regime di impermeabilita`gli uni rispetto agli altri, anche in presenza di ostacoli che vengono aggirati: si parla di **regime laminare.**

Regime laminare



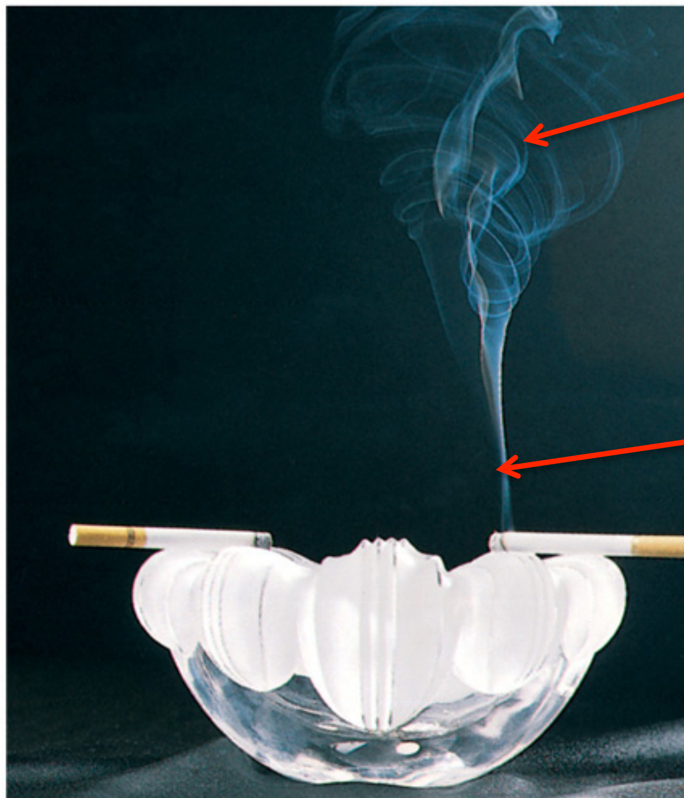
Fondamenti di Fisica - 6° ed.

Questo passaggio da regime laminare a regime turbolento e` dovuto alla viscosita`. Quindi per un fluido perfetto possiamo assumere che i vari filetti di fluido mantengono la loro individualita`.

FLUIDODINAMICA

- **Regime laminare/regime turbolento**

Regime turbolento

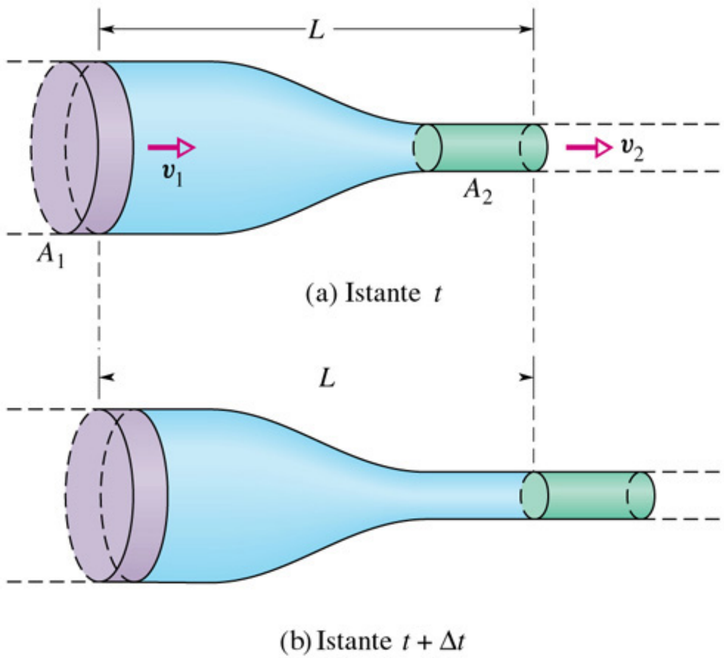


Regime laminare

Fondamenti di Fisica - 6° ed.

EQUAZIONE DI CONTINUITA`

- Consideriamo un *fluido perfetto* e un tubo di flusso (eventualmente coincidente con un condotto). Supponiamo che attraversi la sezione A_1 con velocita` $v_1$ e la sezione $A_2$ con velocita` v_2.
  In assenza di sorgenti o ``pozzi'', la massa di fluido che entra attraverso la sezione A_1 nel tempo Δt deve essere uguale alla massa di fluido che esce dalla sezione A_2 nello stesso intervallo di tempo Δt.



EQUAZIONE DI CONTINUITA`

- **Quanto vale la massa che attraversa A_1 nel tempo Δt?**
  Sara` la massa contenuta nel volume ΔV di un clindro di base A_1 e altezza data dalla distanza percorsa dagli elementi di fluido in Δt, ovvero v_1 Δt.
  Quindi

$$\Delta m_1 = \rho\, \Delta V_1 = \rho\, \overset{\text{base}}{A_1}\, (\overset{\text{altezza}}{v_1\, \Delta t}).$$

In modo analogo per la massa Δm_2 che esce attraverso A_2 in Δt

$$\Delta m_2 = \rho\, \Delta V_2 = \rho\, A_2\, v_2\, \Delta t.$$

dove stiamo usando il fatto che il fluido e` omogeneo (e quindi la densita` in corrispondenza delle due sezioni 1 e 2 e` la stessa)

Uguagliando troviamo: $\Delta V_1 = \Delta V_2$ ovvero

$$A_1\, v_1 = A_2\, v_2 \text{ (equazione di continuita`)}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA`

$A_1\, v_1 = A_2\, v_2$ (equazione di continuita`)

Ovvero, potendo ripetere il ragionamento per ogni coppia di sezioni, si puo` anche dire che

$R_V = A\, v$ non varia lungo il tubo di flusso

La quantita` $R_V$ e` la ***portata volumica: rappresenta il volume di fluido che passa nell'unita` di tempo attraverso una sezione A. Infatti la sua unita` di misura e` m^3/s.***

<u>La eq. di continuita` ci dice allora che la portata volumica e` la stessa in ogni sezione del tubo.</u>

$R_m = \rho\, R_V = \rho\, A\, v$ e` invece la portata di massa (kg/s)

EQUAZIONE DI CONTINUITA`

$A_1 \, v_1 = A_2 \, v_2$ (equazione di continuita`)

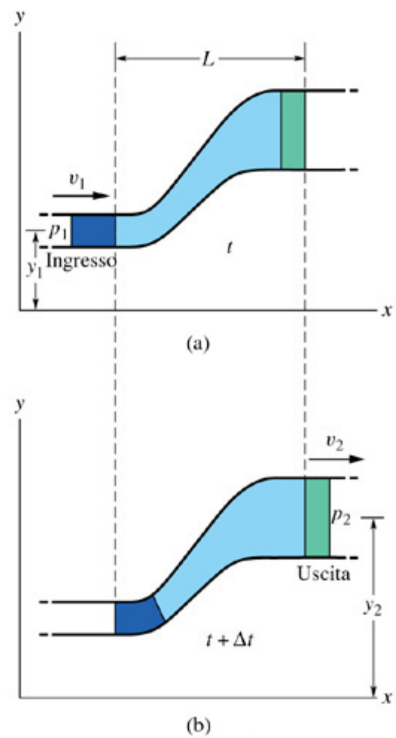
Una conseguenza della equazione di continuità è **che quando il fluido passa attraverso una ``strozzatura'', ovvero quando la sezione $A_2 < A_1$, allora la velocita` aumenta**.
Infatti si ha:

$$v_2 = (A_1/A_2)\, v_1 > v_1 \text{ se } A_2 < A_1$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

- Si consideri un tubo di flusso (o un tubo reale) attraverso il quale scorre un fludio perfetto, come in figura. Siano y_1, v_1 e p_1 l'altezza, la velocita` e la pressione del fluido in corrispondenza della sezione A_1, e in modo analogo per y_2, v_2 e p_2.

Come prima in un tempo Δt la massa, chiamiamola Δm_1, di fluido che attraversa la sezione A_1 deve essere uguale alla massa Δm_2 che nello stesso intervallo di tempo esce attraverso A_2.



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

EQUAZIONE DI BERNOULLI

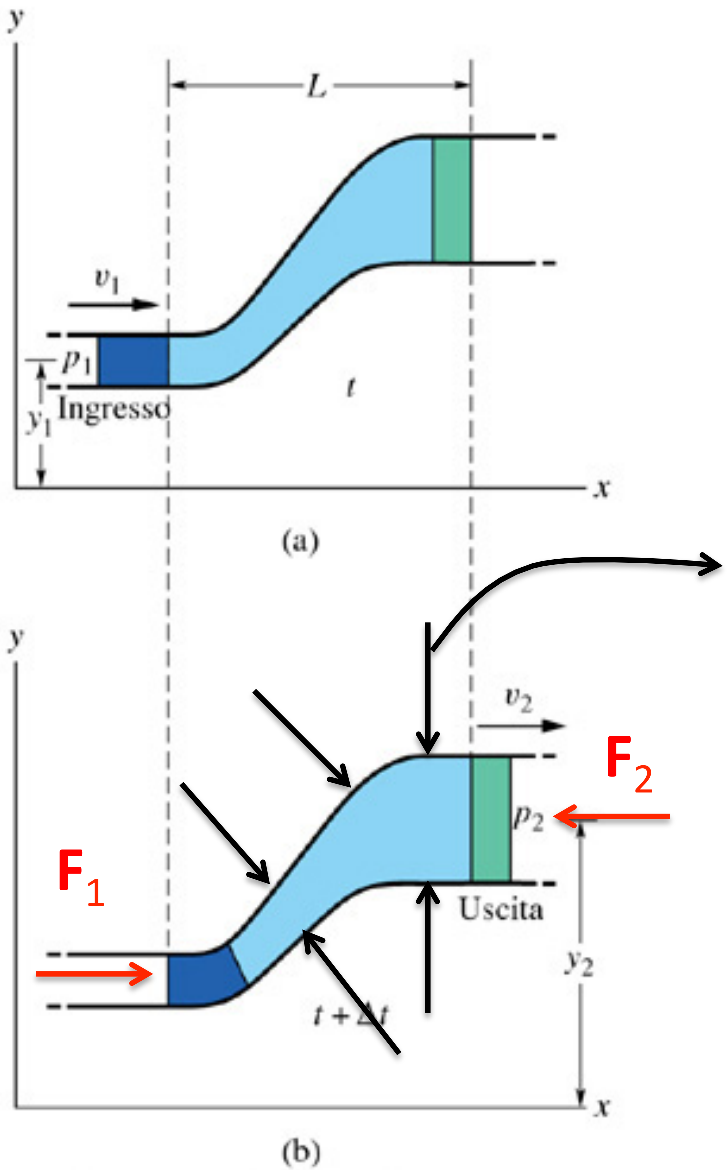
- Applicando il teorema dell'energia cinetica si trova

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, y_2}$$

Ovvero:

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, y \quad \text{non varia lungo il tubo di flusso}}$$

questa somma e` cioe` sempre la stessa in corrispondenza di ogni sezione del tubo



Fondamenti di Fisica - 6° ed.

Forze di pressione che si esercitano sul mantello laterale dal fluido confinante: non fanno lavoro perche` ortogonali allo spostamento del fluido

N.B.: se il fluido non fosse perfetto sul mantello laterale agirebbero anche degli sforzi di taglio *tangenti* al mantello laterale, dovuti alla viscota`, che pero` in un fluido perfetto sono assenti

EQUAZIONE DI BERNOULLI

- Dimostazione: seguiamo quella del libro di testo.

1. Notiamo intanto che la parte di fluido che si trova tra le due altezze y_1 e y_2 non cambia il suo stato. Applichiamo quindi il ***teorema dell'energia cinetica*** alle due estremita` del tubo (considerando quindi la variazione della energia cinetica dovuta alla variazione di velocita` alle due estremita`)

$$L = K_2 - K_1 \, ,$$

dove L e` il lavoro fatto dalle forze agenti sul fluido mentre passa da 1 a 2.
Si ha

$$K_2 - K_1 = \frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^2$$

con $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m = \rho \Delta V$

dove ΔV e` il volume che passa attraverso una sezione nel tempo $\Delta t$ (si veda dimostrazione eq. di continuita`), visto che in un tempo Δt la massa Δm_1 di fluido che attraversa la sezione A_1 deve essere uguale alla massa Δm_2 che nello stesso intervallo di tempo esce attraverso A_2 (e il fluido e` omogeneo).

EQUAZIONE DI BERNOULLI

Quindi

$$K_2 - K_1 = \frac{1}{2}\rho\,\Delta V\,v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\,\Delta V\,v_1^2$$

2. **Adesso calcoliamo il lavoro totale L fatto da tutte le forze che agiscono sul fluido.** Quali sono queste forze? Sono la forza peso e le forze di pressioni in corrispondenza delle superfici A_1 e A_2.

Quindi: $L = L_{peso} + L_{pressioni}$.

$$\begin{aligned} L_{peso} &= U_1^{peso} - U_2^{peso} = \Delta m_1\,g\,y_1 - \Delta m_2\,g\,y_2 = \Delta m\,g\,y_1 - \Delta m\,g\,y_2 \\ &= \rho\,\Delta V\,g\,y_1 - \rho\,\Delta V\,g\,y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{pressioni} &= F_1\Delta x_1 - F_2\Delta x_2 = (p_1 A_1)\Delta x_1 - (p_2 A_2)\Delta x_2 = \\ &= p_1\Delta V_1 - p_2\Delta V_2 = p_1\Delta V - p_2\Delta V \end{aligned}$$

dove $\Delta x_1 = v_1\Delta t$, $\Delta x_2 = v_2\Delta t$, e per la eq.di continuita` $A_1 v_1\Delta t = A_2 v_2 \Delta t$ (ovvero $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$). Si e` anche tenuto da conto che la pressione in 1 spinge il fludio, ma a questo si oppone in 2 la pressione p_2 (da cui il segno meno).

EQUAZIONE DI BERNOULLI

Quindi uguagliando il lavoro totale con la variazione di energia cinetica

$$L = K_2 - K_1 \, ,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2}\rho\, \Delta V \; v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\, \Delta V \; v_1^2 = [\rho\, \Delta V \; g\, y_1 - \rho\, \Delta V \; g\, y_2] + [p_1 \Delta V - p_2 \Delta V]$$

da cui

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, y_2}$$

La formula del teorema di Bernoulli puo` essere infatti vista come la legge di conservazione dell'energia meccanica di una particella estesa ad un fluido.

N.B.: si noti anche che le forze di pressione che agiscono sul mantello laterale del tubo non compiono lavoro perche` ortogonali allo spostamento del fluido.

N.B.: dov' e` che stiamo usando il fatto che il fluido sia perfetto? Nel trascurare la viscosita`, ovvero abbiamo trascurato gli sforzi di taglio che altrimenti agirebbero determinando una dissipazione di energia.