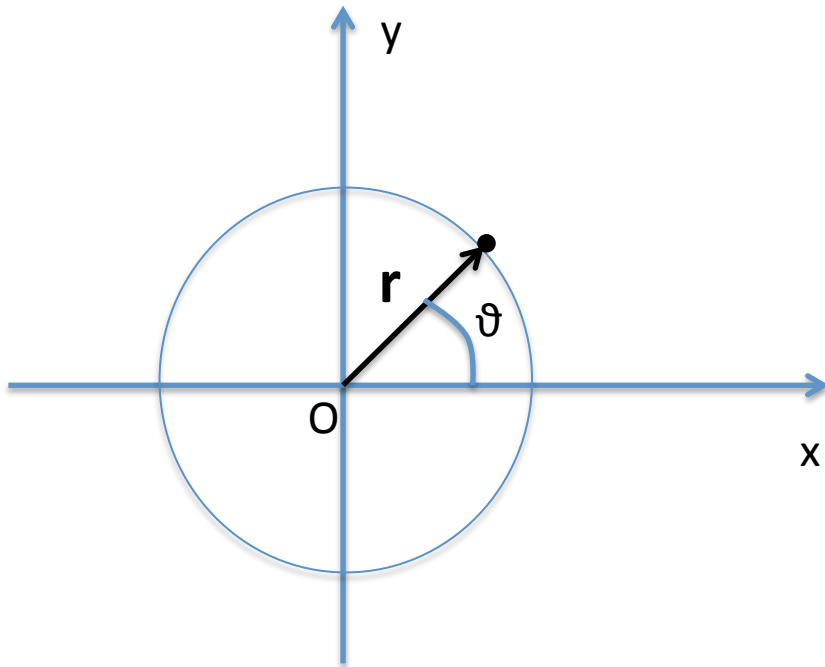


MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- Considerate un corpo (puntiforme) che si muove lungo una circonferenza di raggio r con velocità $\mathbf{v}$ in modulo costante:
 $|\mathbf{v}| = \text{costante}$
- il corpo ruota attorno ad un asse ortogonale al piano della circonferenza
- Se $|\mathbf{v}| = \text{costante}$ si tratta di un ***moto periodico***: dopo un certo tempo T la particella ripassa per la stessa posizione (cioè ha percorso una circonferenza intera)



Dal momento che il corpo si muove sulla circonferenza esso si troverà sempre ad una distanza $|\mathbf{r}| = r$ pari al raggio della circonferenza, e quindi la sua posizione è univocamente determinata dall'angolo ϑ (l'angolo che il raggio vettore $\mathbf{r}$ forma con l'asse delle x . (ϑ è una coordinata angolare))

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- **Periodo T:** il tempo impiegato per percorrere un'intera circonferenza

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

- **Frequenza ν** (indicata dalla lettera greca nu): e' l'inverso del periodo
la sua dimensione fisica e' quella dell'inverso di un tempo;
la sua unita' di misura e' s^{-1} =Hz (**Hertz**)
La frequenza misura il numero di giri al secondo.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

- **Velocita' angolare ω :** la velocita' con la quale il raggio vettore r "spazza" l'angolo θ :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

(ovvero la velocita' con cui varia θ)

se il corpo si muove con v =costante anche $\omega=d\theta/dt$ =costante= $\Delta\theta/\Delta t$ e quindi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

unita' di misura rad/s (radianti al secondo).

N.B.: vedremo fra poco che si puo' definire una velocita' angolare vettoriale.

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

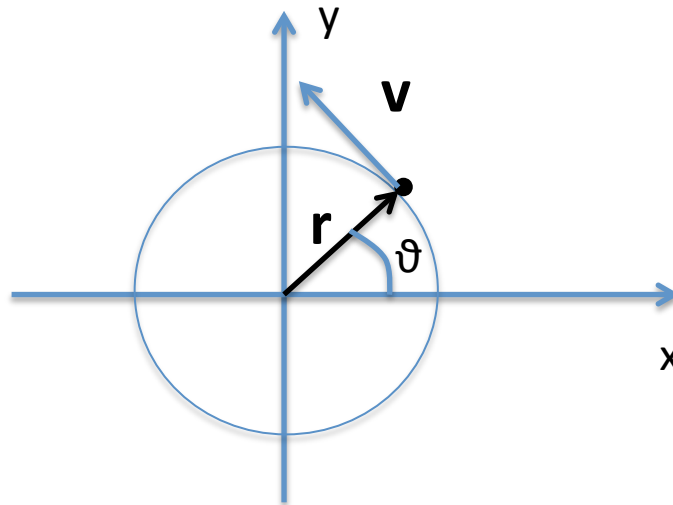
➤ velocità v :

Il suo modulo v sarà dato da

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Direzione e verso della velocità v :

come sappiamo il vettore velocità è tangente alla traiettoria, quindi nel caso di un moto circolare è ortogonale al raggio della circonferenza.



MOTO CIRCOLARE UNIFORME

➤ Accelerazione a :

Intanto notiamo che anche se il modulo della velocità v è costante c'è un'accelerazione diversa da zero, **perché la direzione della velocità cambia.**

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

In generale infatti un vettore può variare nel tempo se o varia il suo modulo o la sua direzione (o tutte e due). Lo si capisce scrivendo un generico vettore $\mathbf{v}$ come

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \hat{\mathbf{v}} = v \hat{\mathbf{v}}$$

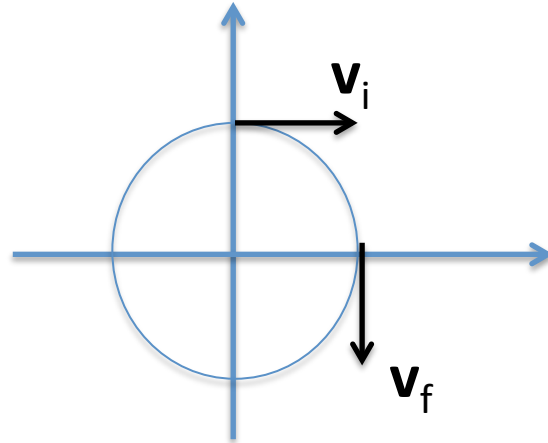
Modulo del vettore

Versore del vettore che ne indica direzione e verso

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

➤ Accelerazione a:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



N.B.: se $v = \text{costante}$ graficamente vuol dire che i vettori $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_f$ hanno la stessa lunghezza

Quindi $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i \neq 0 \Rightarrow \underline{\mathbf{a}_m \neq 0}$ anche se il modulo della velocità $v = \text{cost.}$

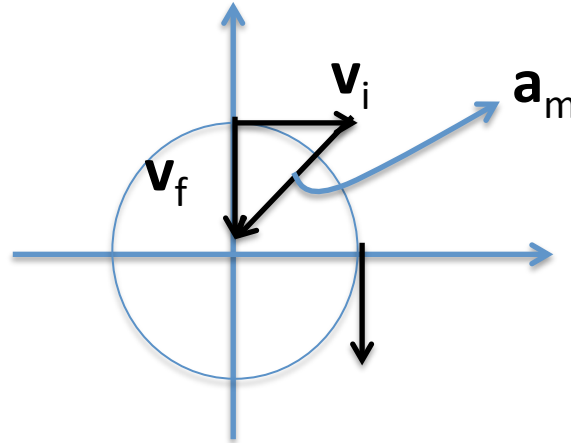
Da questo esempio si vede anche che, mentre la velocità vettoriale $\mathbf{v}$ è tangente alla traiettoria, il vettore accelerazione in generale non lo è.

Nel caso che stiamo considerando di moto circolare uniforme si capisce che l'accelerazione punta verso il centro della circonferenza.

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

➤ Accelerazione a:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$



N.B.: se $v = \text{costante}$ graficamente vuol dire che i vettori $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_f$ hanno la stessa lunghezza

Quindi $\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i \neq 0 \Rightarrow \underline{\vec{a}_m \neq 0}$ anche se il modulo della velocità $v = \text{cost.}$

Da questo esempio si vede anche che, mentre la velocità vettoriale $\vec{v}$ è tangente alla traiettoria, il vettore accelerazione in generale non lo è.

Nel caso che stiamo considerando di moto circolare uniforme si capisce che l'accelerazione punta verso il centro della circonferenza.

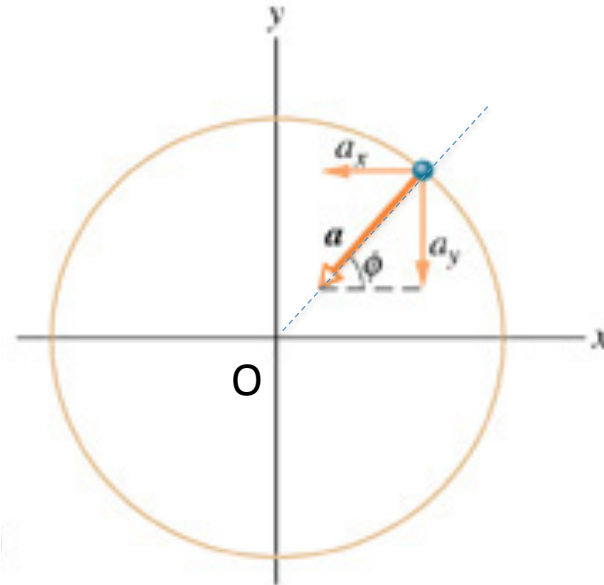
MOTO CIRCOLARE UNIFORME

➤ Accelerazione a :

Il vettore accelerazione è un vettore che ha la stessa direzione del raggio della circonferenza, e punta verso il centro della circonferenza (si parla infatti di ***accelerazione centripeta***)

Il suo modulo è

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega v = \omega^2 r$$



Dimostrazione: si veda paragrafo 4.7 a pag. 65 del testo.

MOTO CIRCOLARE GENERICO

- In questo caso un corpo (puntiforme) si muove lungo una circonferenza di raggio r con velocità il cui modulo non è costante nel tempo ma in generale cambia da istante a istante

$v=v(t) \rightarrow$ il che vuol dire che anche la velocità angolare cambia col tempo $\omega=\omega(t)$

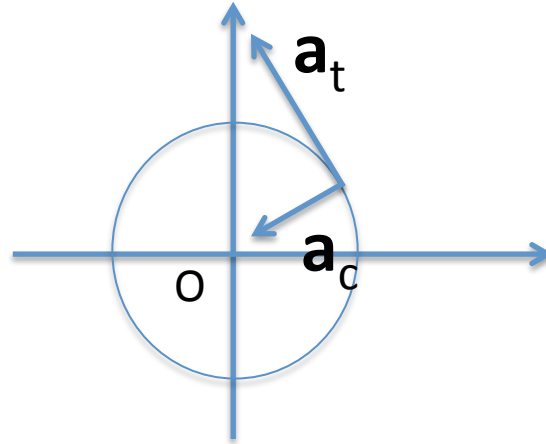
- Continua a rimanere valida la formula

$$v=\omega r$$

- Per l'accelerazione vettoriale $\mathbf{a}$: adesso ha due componenti **un'accelerazione centripeta, ma anche un'accelerazione tangenziale (cioè tangente alla circonferenza).**

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_c+\mathbf{a}_t$$

MOTO CIRCOLARE GENERICO



Infatti scriviamo il vettore velocità ancora come $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\hat{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{v}}$

$$\text{Allora } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{v}} + v\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}$$

Accelerazione centripeta; il suo modulo è

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega v = \omega^2 r$$

Accelerazione tangenziale $\mathbf{a}_t$: è infatti parallela al vettore velocità $\mathbf{v}$.
Il suo modulo è

$$a_t = \alpha r$$

MOTO CIRCOLARE GENERICO

➤ Accelerazione tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{v}}$$

e' infatti parallela al vettore velocita' $\mathbf{v}$

(stesso verso di $\mathbf{v}$ se il modulo di v aumenta, ovvero $dv/dt > 0$, verso opposto a $\mathbf{v}$ se il modulo di $\mathbf{v}$ diminuisce, ovvero $dv/dt < 0$).

Il suo valore numerico e' dato da

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo portato fuori dalla derivata r (visto che e' il raggio della circonferenza che quindi rimane costante nel tempo) e abbiamo introdotto **l'accelerazione angolare α**

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

ovvero la variazione della velocita' angolare per unita' di tempo (si misura in rad/s^2).

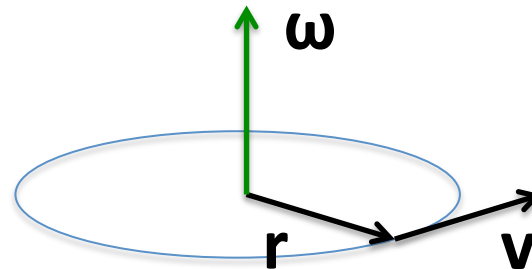
MOTO CIRCOLARE GENERICO

➤ Accelerazione centripeta

$$\mathbf{a}_c = v \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}$$

Posso anche esprimerla in questo modo: $v \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = v (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{v}}) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$

dove abbiamo introdotto la velocità angolare vettoriale $\boldsymbol{\omega}$, **definita come quel vettore che ha modulo pari alla velocità angolare ω , direzione coincidente coll'asse di rotazione e verso tale da "vedere" la rotazione procedere in senso antiorario.**



E allora troviamo

$$a_c = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad (\text{N.B.: } \boldsymbol{\omega} \text{ è ortogonale a } \mathbf{v}).$$

che infatti per un moto circolare uniforme ridà la formula già vista (qui però v e ω dipendono dal tempo).

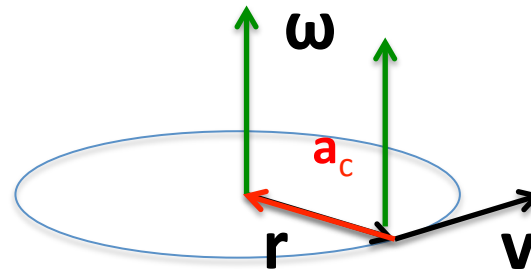
MOTO CIRCOLARE GENERICO

➤ Accelerazione centripeta

$$\mathbf{a}_c = v \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}$$

Posso anche esprimerla in questo modo: $v \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = v (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{v}}) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$

dove abbiamo introdotto la velocità angolare vettoriale $\boldsymbol{\omega}$, **definita come quel vettore che ha modulo pari alla velocità angolare ω , direzione coincidente coll'asse di rotazione e verso tale da "vedere" la rotazione procedere in senso antiorario.**



E allora troviamo

$$a_c = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad (\text{N.B.: } \boldsymbol{\omega} \text{ e' ortogonale a } \mathbf{v}).$$

che infatti per un moto circolare uniforme ridà la formula già vista (qui però v e ω dipendono dal tempo).

N.B.: la formula

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{v}})$$

che esprime come cambia nel tempo la direzione di un vettore $\mathbf{v}$ e` completamente generale, cioe` vale per un qualsiasi generico vettore che istantaneamente stia ruotando con velocita` angolare vettoriale $\boldsymbol{\omega}$.

Va sotto il nome di ***Formula di Poisson***.

MOTO OSCILLATORIO ARMONICO

- Riconsideriamo il moto circolare uniforme

$$\omega = \text{costante} = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

N.B.: e' la stessa cosa vista per un moto rettilineo uniforme, solo che qui stiamo usando la variabile angolare ϑ . Basta rifare gli stessi passaggi sostituendo a $x \rightarrow \vartheta$

- Allora se sono interessato alle componenti del moto lungo x e y

$$x(t) = r \cos \theta = r \cos(\theta_0 + \omega t); \quad y(t) = r \sin \theta = r \sin(\theta_0 + \omega t)$$

- Ovvero le proiezioni di un moto circolare uniforme nelle sue componenti lungo x e y sono dei **moti oscillatori armonici** (ovvero con dipendenza sinusoidale dal tempo)

Si tratta di moti periodici con periodo $T=2\pi/\omega$

Terminologia:

r: ampiezza dell'oscillazione (spostamento massimo del corpo)

ϑ_0 : fase iniziale

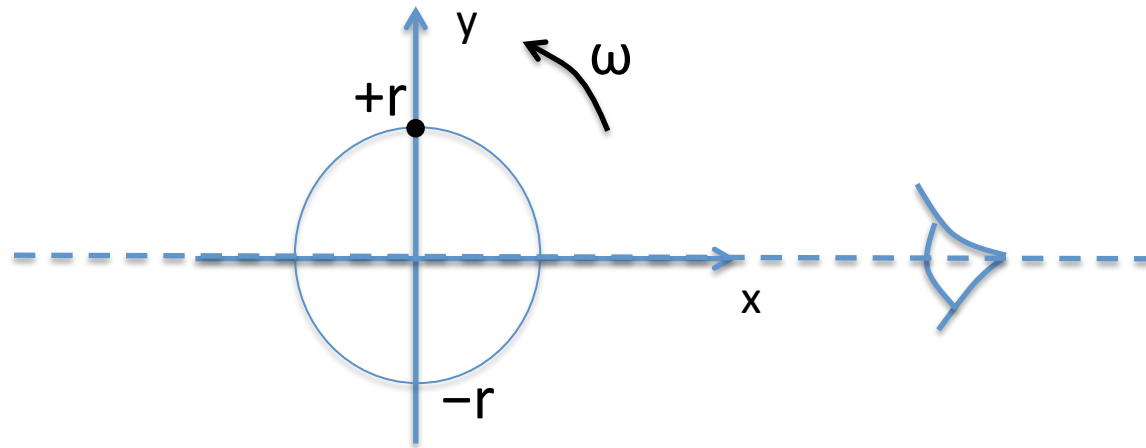
ω : pulsazione dell'oscillazione

MOTO OSCILLATORIO ARMONICO

- Nell'esempio considerato, cosa vuol dire in pratica avere che i moti del corpo lungo l'asse x e lungo l'asse y sono dei moti oscillatori armonici?

Immaginate di avere un disco che ruota con velocità angolare costante e fissate un chiodo sul bordo del disco (quindi a distanza r dal centro). Poi osservate il disco di taglio:

vedrete appunto il chiodo che periodicamente ripassa per la posizione iniziale e appunto oscilla tra $-r$ ed r



RIFERIMENTI PER I MOTI CIRCOLARI

Si studino i seguenti paragrafi del libro:

- Dal paragrafo 10.1 al paragrafo 10.5.
- Paragrafo 15.1, 15.2 e 15.7