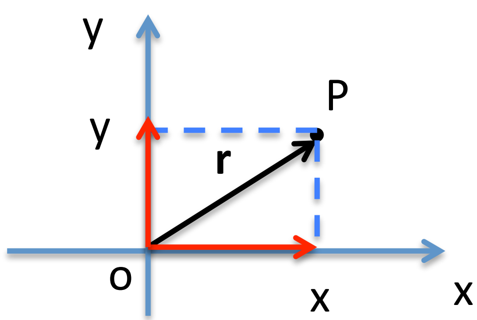
MOTI in 2 o 3 DIMENSIONI: Posizione, spostamento; velocita` ed accelerazione (media ed istantanea) come vettori.

- Vediamo adesso come applicare quello visto sui vettori a varie grandezze fisiche.
- Si fissi un sistema di riferimento (consideriamo il caso a due dimensioni per semplicita`).



Supponiamo che a un certo istante un corpo puntiforme occupi il punto P. La sua posizione rispetto all'origine del sistema di riferimento e` data dal <u>vettore posizione</u> **r** (o <u>raggio vettore</u>), che e` quel vettore che parte dall'origine e arriva in P.

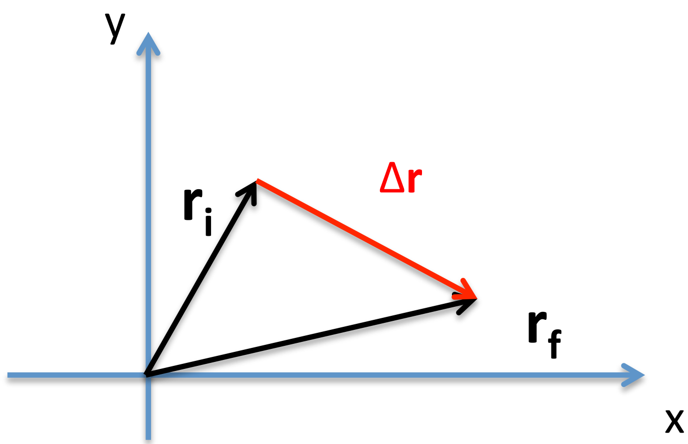
Le sue unita` di misura sono il metro.
<u>Le sue componenti lungo gli assi x e y sono le coordinate del punto rispetto al sistema di riferimento scelto</u>

r=(x,y), oppure, usando i versori degli assi

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

N.B.: nel testo e nelle formule indichero` i vettori o con delle lettere con sopra delle frecce o con delle lettere in grassetto. Queste due sono le convenzioni che di solito vengono usate

VETTORE SPOSTAMENTO



Supponiamo che il corpo in movimento occupi a un istante iniziale t_i la posizione individuata dal raggio vettore $\mathbf{r}(t_i)=\mathbf{r}_i$, e a un istante finale t_f la posizione $\mathbf{r}(t_f)=\mathbf{r}_f$.
Allora il vettore spostamento e\`

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

In termini delle componenti (usando quello visto per la differenza tra due vettori) avremo:

$$\Delta\vec{r} \equiv (\Delta x, \Delta y) = (x_f - x_i, y_f - y_i)$$

Seguendo le regole grafiche descritte per la differenza tra due vettori abbiamo disegnato il vettore spostamento: il vettore che va dalla punta di $\mathbf{r}_i$ alla punta della posizione finale $\mathbf{r}_f$, indicando cosi\` appunto lo spostamento del corpo dalla posizione inziale a quella finale

LEGGE ORARIA

In generale la posizione del corpo puntiforme sara` diversa da istante ad istante. Quindi ad ogni istante t associamo la corrispondente posizione della particella

$t \rightarrow \mathbf{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$

In modo analogo al caso unidimensionale se conosciamo istante per istante la posizione della particella (o equivalentemente <u>le sue coordinate x(t), y(t), z(t)</u>) allora sappiamo tutto del suo moto.

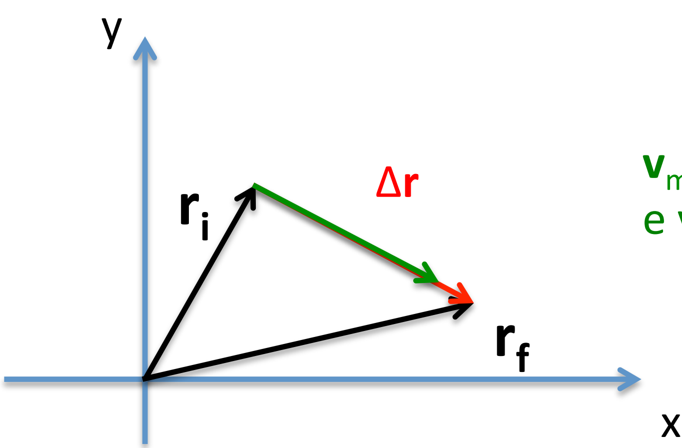
La funzione del tempo $t \rightarrow \mathbf{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$ si chiama ***<u>Legge oraria del moto</u>***

VETTORE VELOCITA` MEDIA

In modo analogo al caso unidimensionale si definisce ***la velocita` vettoriale media*** come

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

N.B.: se Δ**r** e` un vettore allora $\mathbf{v}_m$ e` un vettore, perche` e` dato dal prodotto tra un vettore (Δ**r**) e uno scalare (un numero), cioe` (1/ Δt). Siccome Δt>0 allora la velocita` media $\mathbf{v}_m$ e` un vettore che ha la stessa direzione e verso dello spostantento Δ**r**.



$\mathbf{v}_m$ e` un vettore con la stessa direzione e verso di Δ**r**

VETTORE VELOCITA` MEDIA

La definizione sopra e` una relazione vettoriale, quindi deve valere come al solito componente per componente, ovvero:

$$\vec{\mathrm{v}}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

VETTORE VELOCITA` ISTANTANEA

In modo analogo al caso unidimensionale si definisce ***la velocita` vettoriale istantanea*** (o semplicemente vettore velocita`) come

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

ovvero il limite della velocita` media (relativa ad un certo intervallo di tempo Δt), per un intervallo di tempo via via sempre piu` piccolo, al limite infinitesimo.

In modo analogo al caso unidimensionale la velocita` istantanea e` quindi la derivata rispetto al tempo della posizione

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

dove la posizione della particella **r** varia in genere da istante ad istante, ovvero **r** = **r** (t). Chiaramente anche la velocita` potra` in genere variare da istante ad istante, **v**=**v**(t).

VETTORE VELOCITA` ISTANTANEA

Cosa vuol dire da un punto di vista ``pratico'' calcolarsi la derivata rispetto al tempo di un vettore (in questo caso **r**(t))?
Siccome possiamo identificare il vettore posizione con la coppia (o terna) ordinata delle sue componenti (le coordinate x e y occupate via via durante il moto dalla particella) , ovvero **r(t)**=(x(t),y(t)), la derivata rispetto al tempo di **r**(t) e` data da

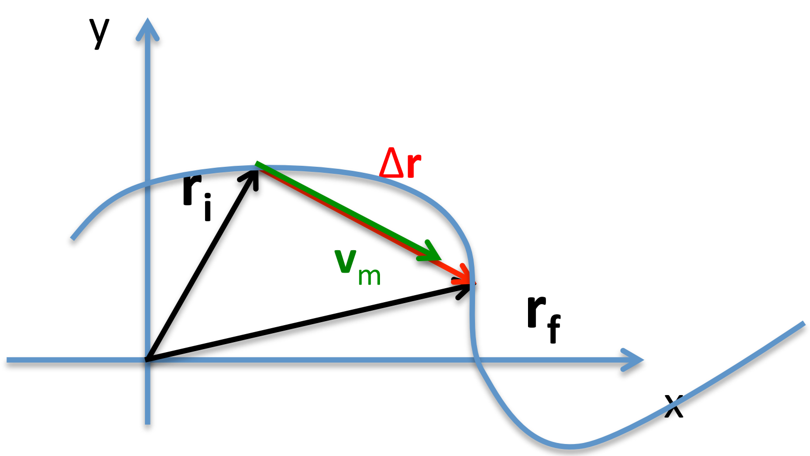
$$(\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y) \equiv \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

Ovvero, le componente lungo l' asse x della velocita` ($v_x$) e` semplicemente la derivata (dx/dt), e cosi` per le altre componenti.

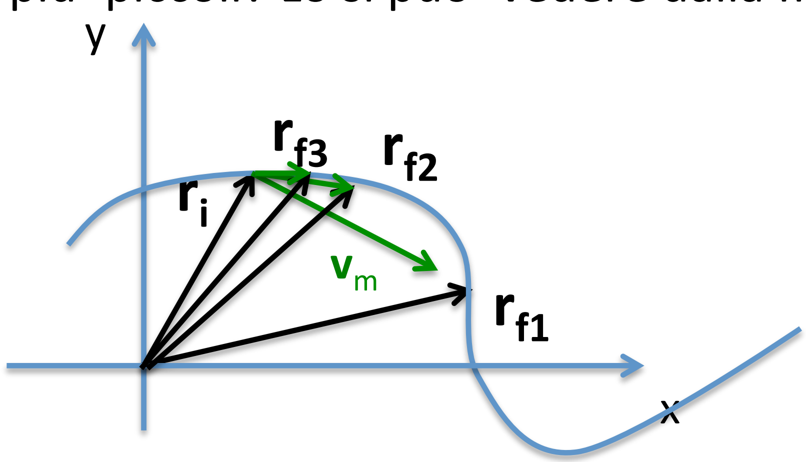
<u>In pratica, se si scompone il moto lungo i tre assi coordinati, allora si tratta di ripetere per ciascuna componente quello che abbiamo gia` imparato per un moto lungo un asse.</u>

VETTORE VELOCITA` ISTANTANEA e TRAIETTORIA

La particella durante il suo moto descrive una ***traiettoria***, che per definizione e` l'insieme dei punti occupati da un corpo durante il suo moto (quella in blu nel disegno)



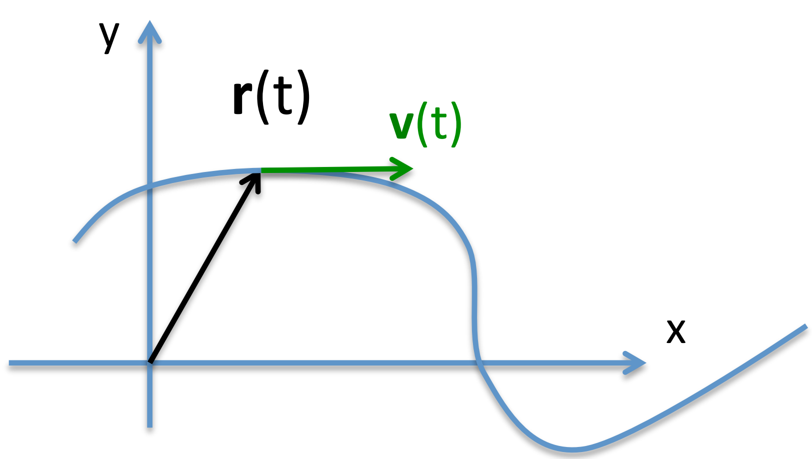
Cosa succede per la velocita` media man mano che consideriamo intervalli di tempo Δt via via sempre piu` piccoli? Lo si puo` vedere dalla figura qui sotto:



VETTORE VELOCITA` ISTANTANEA e TRAIETTORIA

Man mano che osserviamo il moto per intervalli di tempo via via sempre piu` piccoli, ci accogiamo che la velocita` media tende ad essereun vettore tangente alla traiettoria. Siccome man mano che consideriamo intervalli di tempo via via sempre piu` piccoli la velocita` media definisce la velocita` istantanea possiamo concludere la seguente semplice ma importante proprieta` della velocita` istantanea:

> Ad un determinato istante la velocita` vettoriale **v**(t) e` tangente alla traiettoria della particella nel punto occupato dalla particella in quell'istante (e la velocita` punta lungo la direzione del moto).

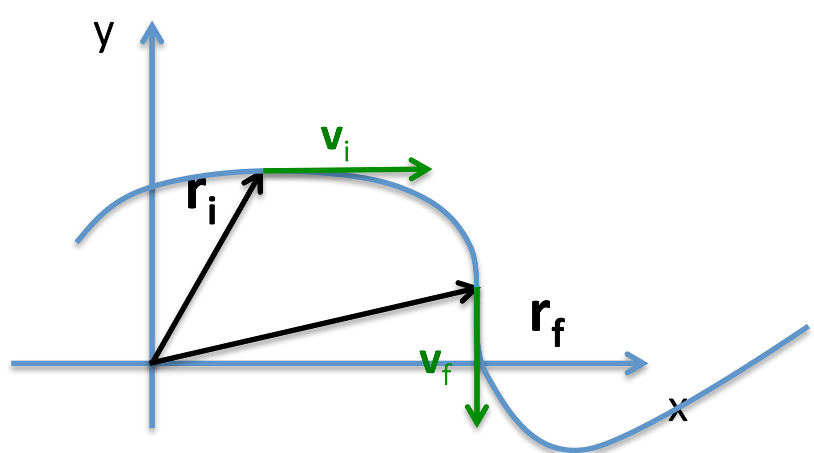


VETTORE ACCELERAZIONE MEDIA

In modo analogo al caso unidimensionale definiamo un'accelerazione vettoriale media come il rapporto tra la variazione del ***vettore*** velocita` e l'intervallo di tempo entro cui si e` verificata tale variazione

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

dove $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ e` la differenza tra la veloita` finale $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}(t_f)$ e la velocita` iniziale $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(t_i)$.
Quindi risultera` che l'accelerazione media e` un vettore con la stessa direzione e verso della variazione della velocita`.



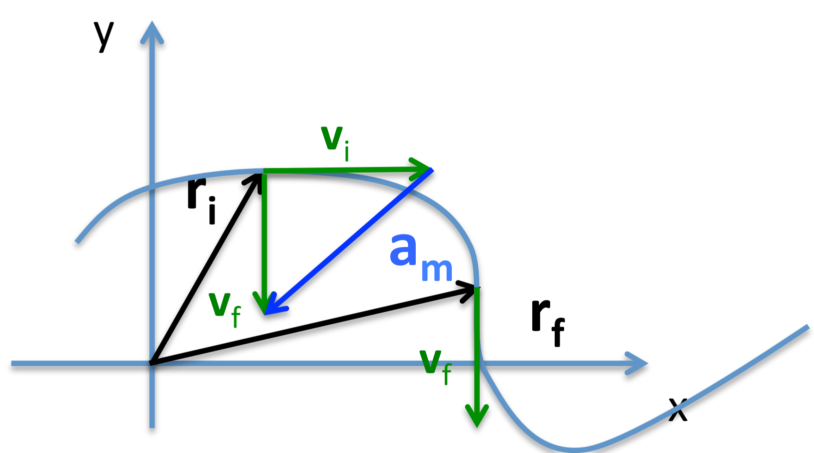
VETTORE ACCELERAZIONE MEDIA

In modo analogo al caso unidimensionale definiamo un'accelerazione vettoriale media come il rapporto tra la variazione del ***vettore*** velocita` e l'inrrevallo di tempo entro cui si e` verificata tale variazione

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

dove $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$ e` la differenza tra la veloita` finale $\mathbf{v}_f=\mathbf{v}(t_f)$ e la velocita` iniziale $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}(t_i)$.

Quindi risultera` che l'accelerazione media e` un vettore con la stessa direzione e verso della variazione della velocita`.



VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Definiamo l'accelerazione vettoriale istantanea (o semplicemente accelerazione vettoriale) come il limite per intervalli di tempo via via piu` piccoli (al limite infinitesimi) della accelerazione media

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t}$$

In modo analogo al caso unidimensionale l'accelerazione istantanea e` quindi la derivata rispetto al tempo della velocita` **v**(t)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$$

VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Esattamente come fatto per la velocita` vettoriale istantanea, calcolarsi questa derivata vuol dire calcolarsi le derivate rispetto al tempo per ciascuna componente della velocita`

$$(a_x, a_y) \equiv \vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \left(\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}, \frac{d\mathrm{v}_y}{dt} \right)$$

Ovvero, la componente lungo l' asse x dell' accelerazione (a_x) e` semplicemente la derivata rispetto al tempo della componente lungo x della velocita` (dv_x/dt), e cosi` per le altre componenti.

VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Ricordando che

$$(\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y) \equiv \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

si ha che

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

ovvero

$$(a_x, a_y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

Ovvero, la componente lungo l' asse x dell' accelerazione (a_x) si puo` ottenere anche come la derivata seconda della coordinata x fatta rispetto al tempo due volte e cosi` per le altre componenti.