

SOMMARIO

Refs: $\begin{cases} 0406398 \\ 0311422 \\ 1002.1616 \end{cases}$

1

- caso di un campo scalare (inflatore) massless in un de-Sitter puro.

— richiamo Funzione a 2 punti.

— derivazione della Formula In-In per il calcolo di un generico correlatore ^{cosmologico} n -punti.

— applicazione a teoria $\mathcal{N} = \frac{2}{3!} \phi^3$

(• Non Gaussianità in single Field slow-roll inflation)

- metrica di Background

$$ds^2 = a^2 [d\eta^2 - d\vec{x}^2]$$

(de-Sitter)

tempo conforme $\rightarrow d\eta = a dt$

$$a = -\frac{1}{H\eta}$$

H : par. di Hubble.

$$\phi \equiv \phi(\vec{x}, t)$$

$$\cdot \mathcal{L}_\phi^0 = \mathcal{N} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \stackrel{\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{aH}}{=} \frac{a^2}{2} [\dot{\phi}^2 - (\partial_i \phi)^2]$$

$$1 =: \frac{d}{d\eta}$$

— ridefinizione di campo $\phi = \frac{\chi}{a}$ ($\chi = \phi \cdot a$)

$$\cdot \mathcal{L}_\chi^0 = \frac{1}{2} [\dot{\chi}^2 - (\partial_i \chi)^2 - \frac{1}{4a^2} \chi^2]$$

Lo Lagrangiana di campo scalare in uno sp-tempo di Minkowski con termine di massa efficace $m_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{4a^2} \rightarrow$ quantizzazione canonica

$$\chi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \chi(k, u)$$

2

$$\rightarrow \chi(k, u) = v(\vec{k}, u) a(\vec{k}) + v^*(-\vec{k}, u) a^\dagger(-\vec{k}, u)$$

$$\begin{cases} a|0\rangle = 0 \\ \langle 0|a^\dagger = 0 \\ [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{cases}$$

- equazione del moto per $u(k, u)$

$$\begin{cases} u'' + \left(k^2 - \frac{2}{u^2}\right) u = 0 \\ v(k, u) \stackrel{\text{B.D.}}{=} \frac{N}{\sqrt{2k}} e^{-ik u} \end{cases}$$

$-k u \gg 1$: sub-horizon
($\frac{k}{aH} \gg 1$)

soluzione

$$\Rightarrow -v(k, u) = \frac{e^{-iku}}{\sqrt{2k}} \left(\hat{n} + \frac{1}{ku} \right)$$

N : normalizzazione arbitraria.

• POWER-SPECTRUM.

$$\langle Q(k_1, u) Q(k_2, u) \rangle = \langle 0 | Q(k_1, u) Q(k_2, u) | 0 \rangle = \frac{1}{a^2} \langle 0 | \chi(k_1, u) \chi(k_2, u) | 0 \rangle$$

$$= (2\pi)^3 \delta^3(k_1 - k_2) \frac{|v(k_1, u)|^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2k_1} \left(1 + \frac{1}{k_1^2 u^2} \right) \cdot \frac{1}{H^2 u^2}$$

($\frac{k}{aH} \ll 1$)
 $-k u \ll 1$
super-horizon.

$$= (2\pi)^3 \delta^3(k_1 - k_2) \frac{H^2}{2k_1^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_Q(k) = \frac{H^2}{2k^3}} \rightarrow \text{Harrison-Zel'dovich.}$$

slow-tell inf.

$$P_\psi = \frac{H^2}{2k^3 + v}$$
 ↳
 piccola deviazione
 da Harrison-Zel'dovich.

$$v = O(\epsilon, u) \ll 1$$

$$\neq 0$$

$$\begin{cases} \xi \sim (V'/V)^2 \\ \text{e. de sit} \\ \eta \sim (V''/V) \end{cases}$$

↳
piccola massa per il

Definiamo $Q_n(u) = \chi(k_1, u) \cdots \chi(k_n, u)$

$\langle 0 | Q_n(u) | 0 \rangle$: = Funzione di correlazione a n-punti

$\chi \sim u + u^4 \Rightarrow$

- per n pari, il correlatore è dato da somme di prodotti di funzioni a 2 punti.
- per n dispari, il correlatore è nullo.

- campi che obbediscono a questo pattern sono campi con statistica puramente Gaussiana. In tal caso il calcolo della funzione a n-punti è triviale. χ descritto dalla sola lagrangiana L_χ^0 segue questa statistica.

- campi che hanno lo stesso pattern acquisiscono non-Gaussianità. Se voglio dare una statistica non Gaussiana a χ allora a un certo tempo to ho occorrenze termini di interazione nella lagrangiana.

$$L_\chi = L_\chi^0 + L_{INT}$$

$$\langle Q_n(t) \rangle = \langle 0 | Q_n(t) | 0 \rangle = ?$$

3

- χ non è più un campo di $k=6$ libbre, quindi
 $\chi \neq a u + a^* u^*$. Problema!

Soluzione: calcolo il correlatore in visuale di interazione

• gli stati fisici (lo) evolvono secondo un'equazione di Schrödinger con H_{INT} al posto di H_{TOT} .

• gli operatori di campo evolvono secondo un'equazione di Heisenberg con H_0 al posto di H_{TOT} .

$$H_{TOT} = S \delta^3 \times \mathcal{H} \quad \xrightarrow{\text{trasf. di Legendre}} \quad \mathcal{H} \stackrel{!}{=} \chi'^2 - \mathcal{L}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\chi'^2}{2} + \frac{1}{2} (\partial_i \chi)^2 + \frac{1}{42} \chi^2 - \mathcal{L}_{INT}$$

$$\stackrel{!}{=} H_0 + H_{INT}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 = \frac{1}{2} S \delta^3 \times \left[\chi'^2 + (\partial_i \chi)^2 + \frac{1}{42} \chi^2 \right] \\ H_{INT} = - S \delta^3 \times \mathcal{L}_{INT} \end{array} \right.$$

- ev. temp. per i campi χ^I :

$$\frac{d\chi^I}{dt} = -i [\chi^I, H_0] \rightarrow \chi^I \text{ ritorna a essere campo di } k=6 \text{ libbre}$$

$$\chi^I \sim a u + a^* u^* \text{ come prima}$$

u : come prima.

ev. temp. stato di vuoto:

5

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} |0\rangle^I = -i H_{INT} |0\rangle^I \\ |0\rangle^I(t) = U(t, t_0) |0\rangle(t_0) \end{cases}$$

$U(t, t_0) :=$ op. di ev. temporale del vuoto.

$$[U U^{-1} = \mathbb{I}]$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t, t_0) = -i H_{INT} U(t, t_0) \\ U(t_0, t_0) = \mathbb{I} \end{cases}$$

soluzione Formale:

$$U(t, t_0) = T \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t H_{INT}(t') dt' \right) \right]$$

$$\begin{cases} |0\rangle^I(t) = U(t, t_0) |0\rangle(t_0) \\ \langle 0|^I(t) = U^{-1}(t, t_0) \langle 0|(t_0) \end{cases}$$

Def:

$$\begin{aligned} T(\chi(t) \chi(t')) &= \\ &= \begin{cases} \chi(t) \chi(t') & t < t' \\ \chi(t') \chi(t) & t' < t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \langle \alpha_n(t) \rangle = \langle 0^I | \alpha_n^I(t) | 0\rangle^I$$

$$= \langle 0|(t_0) U^{-1}(t, t_0) \alpha_n^I(t) U(t, t_0) | 0\rangle(t_0)$$

$|0\rangle(t_0) :=$ stato di vuoto al momento dell'accensione dell'intensore.

Per continuità deve essere uguale allo st. di vuoto della teoria libera ($|0\rangle$)

$$\langle Q_n(t) \rangle = \langle 0 | U^{-1}(t, t_0) Q_n^F(t) U(t, t_0) | 0 \rangle$$

$$U(t, t_0) = T \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t H_{INT}(t') dt' \right) \right]$$

Formula
In-In,

$$(*) \quad H_{INT} = \lambda \hat{H}_{INT} \quad \lambda \ll 1.$$

$$① \quad \langle Q_n(t) \rangle \sim -i \int_{t_0}^t \langle 0 | [H_{INT}^F(t'), Q_n^F(t)] | 0 \rangle dt' + \dots$$

espando
l'esponenziale in
 $U(t, t_0)$ e prendo
il primo ordine in
 H_{INT} non banale.

adesso consideriamo la teoria $\mathcal{L}_{INT} = \sqrt{\frac{a}{3!}} \frac{a}{3!} \psi^3$
 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{INT}$
 $= \frac{a}{3!} \cdot a \psi^3$

$$H_{INT} = -S \delta^3 \times \mathcal{L}_{INT} = -\frac{a}{3!} a S \delta^3 \times \psi^3$$

- calcolo $\langle \chi(k_1, u) \chi(k_2, u) \chi(k_3, u) \rangle$ usando ①

PAUSA

- esprime H_{INT} in Fourier space e esplicita $\alpha = -\frac{1}{H_4}$
scrivo

$$\begin{aligned} \textcircled{2} H_{INT}(u) &= + \frac{2}{3!} \frac{N}{H_4} \left(\int d^3x \right) \int d^3p d^3p' d^3p'' \left(e^{i(\vec{p} + \vec{p}' + \vec{p}'') \cdot \vec{x}} \right) \chi(p, u) \chi(p', u) \chi(p'', u) \\ &\quad (2\pi)^3 \delta^3(p + p' + p'') \\ &= + \frac{2}{3!} \frac{N}{H_4} \int d^3p d^3p' d^3p'' (2\pi)^3 \delta^3(p + p' + p'') \chi(p, u) \chi(p', u) \chi(p'', u) \end{aligned}$$

Inserisco $\textcircled{2}$ in $\textcircled{1}$ per calcolare $\langle \chi^3 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \chi^3(u) \rangle &= \frac{-i 2 \times 2}{3! H} (2\pi)^3 \int_{y_0}^y \frac{dy'}{y'} \int d^3p d^3p' d^3p'' \delta^3(p + p' + p'') \times \\ &\quad \times \left(\langle 0 | \chi(p, u) \chi(p', u) \chi(p'', u) \chi(k_1, u) \chi(k_2, u) \chi(k_3, u) | 0 \rangle \right) \end{aligned}$$

- si può elidere e mettere un fattore di $\sim$ simmetria $\times 2$: si vede a posteriori che ciò è giusto.

• $y_0 :=$ tempo conf. in cui accade l'inflazione. Assumo che l'inflazione sia scorsa per quando tutti e 3 i modi k_i erano ben al di sotto dell'orizzonte di Hubble comovente.

$$- k_i y_0 \gg 1 \quad \forall k_i \Rightarrow y_0 = -\infty$$

• $y :=$ tempo conf. in cui valuto il correlatore. Siccome siamo interessati al ~~da~~ valore del correlatore ~~nel~~ su scale super-orizzonte al termine dell'inflazione allora $-k_i y \ll 1, \forall k_i$

lunghe:

$$\left. \langle \chi^3(u) \rangle \right|_{-k_1 u < 1} = -\frac{2i\lambda}{\pi^2 H} (2\pi)^3 \int_{-\infty}^u \frac{du'}{u'} \delta^3(p) \delta^3(p') \delta^3(p'') \delta^3(p+p'+p'') \\ \times \underbrace{\langle 0 | \chi(p, u') \chi(p', u') \chi(p'', u') \chi(k_1 u) \chi(k_2 u) \chi(k_3 u) | 0 \rangle}_{\text{calcolare}}$$

Ci resta da ~~calcolare~~ ~~calcolare~~ : TEOREMA DI WICK.

~~è dato dalla somma di tutte le possibili combinazioni di termini ottenuti contrando~~

• definisco contrazione tra 2 campi:

$$\overbrace{\chi(k, u) \chi(k', u')} = \langle 0 | \chi(k, u) \chi(k', u) | 0 \rangle \\ \downarrow \\ \chi_{\alpha} u + \alpha u = (2\pi)^3 \delta^3(k - k') u(k, u) u^*(k', u)$$

$$u(k, u) = \frac{e^{-ik u}}{\sqrt{2k}} \left(i + \frac{1}{ku} \right)$$

→ ~~è dato dalla somma di tutte le possibili combinazioni di termini ottenuti contrando a coppie tutti i campi~~ ^{contenuti in} ~~disponibili~~, con la condizione che posso contrarre i campi valutati in tempi diversi.

8

$$\begin{aligned}
 &= \chi(p, u) \chi(p', u) \chi(p'', u) \chi(k_1, u) \chi(k_2, u) \chi(k_3, u) + \\
 &+ \chi(p, u) \chi(p', u) \chi(p'', u) \chi(k_1, u) \chi(k_2, u) \chi(k_3, u) + \\
 &+ \dots = \\
 &= \chi(p, u) \chi(p', u) \chi(p'', u) \chi(k_1, u) \chi(k_2, u) \chi(k_3, u) + \\
 &+ \sum_{perm.} (k_i) \cdot \\
 &= (2\pi)^3 \delta^3(p - k_1) U(p, u) U^*(k_1, u) \cdot (2\pi)^3 \delta^3(p' - k_2) U(p', u) U^*(k_2, u) \cdot \\
 &\cdot (2\pi)^3 \delta^3(p'' - k_3) U(p'', u) U^*(k_3, u) + \sum_{perm.} (k_i)
 \end{aligned}$$

Integre:

$$\begin{aligned}
 \langle \chi^3(q) \rangle &= \frac{-2i\lambda}{3!H^4} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \left(\prod_{i=1}^3 \frac{1}{2k_i} \right) \times \\
 \textcircled{3} \quad &(-k_{i4} < 0) \\
 &\times \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial u'} \left(i k_1 + \frac{1}{u'} \right) \left(i k_2 + \frac{1}{u'} \right) \left(i k_3 + \frac{1}{u'} \right) e^{-i k_T u'} + \right. \\
 &\left. + \sum_{perm.} (k_i) \right]
 \end{aligned}$$

$$k_T = k_1 + k_2 + k_3$$

9

— Per risolvere gli integrali in (3), l'integrale notevole da sapere fare è:

$$I = \int_{-\infty}^{k_4} \frac{dx}{x} e^{-ix}$$

$$u^1 = x$$

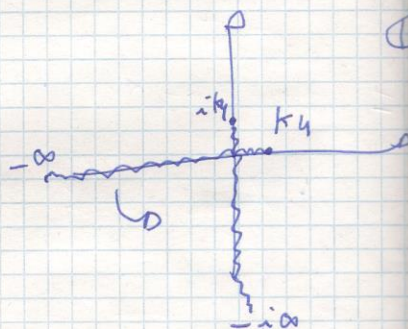
→ è mal definito, in quanto per $x \rightarrow -\infty$ e^{-ix} è oscillante.

• Riedifiniamo promuovendo $x \rightarrow z$ complessa.

$$I = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{k_4} \frac{dz}{z} e^{-iz} \right)$$

— effetto rotazione di Wick $z = -iz'$, $z' = iz$

$$I = \operatorname{Re} \left(\int_{-i\infty}^{ik_4} \frac{dz'}{z'} e^{-z'} \right)$$



$$E_i(z) = \int_{\infty}^z \frac{dz'}{z'} e^{-z'} \rightarrow \text{definito } \forall z$$

↓
Complex
exponential
integral

che non stia sull'asse reale negativo dipende solo da z .

non p. in serie!

$$E_i(z) = -\gamma - \ln z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k \cdot k!}$$

{ $-\gamma$ = costante di Eulero Mascheroni $\gamma \approx 0.577$
 $-\ln z$ è il log. principale di z .

10

$$I = \text{Re} [E_i(iku)]$$

$$= \text{Re} \left[-\gamma - \ln(iku) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-iku)^k}{k k!} \right] \quad | -ku \ll 1$$

$$= \text{Re} \left[-\gamma - \ln|ku| + i \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= -\gamma - \ln|ku|$$

#

In definitiva:

$-ku \ll 1$

$$- \langle \chi(k_1, u) \chi(k_2, u) \chi(k_3, u) \rangle = \frac{1}{12 H^3} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \prod_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i^3} \right) \cdot A(k_i)$$

$$A(k_i) = \left[\sum_{i=1}^3 k_i^3 (\gamma + \ln|k_i u| + \mathcal{I}(k_i)) \right]$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}(k_i) \sim 0(u) \quad \forall k_i. \\ \downarrow \\ \text{molto complicato} \end{cases}$$

Ref.: 0406398 Arkiv,
pag. 35 (footnote).

- ti tutto al campo $Q = \frac{\chi}{a}$

inv. per trasl. della
teoria.

$$\langle Q(k_1, u) Q(k_2, u) Q(k_3, u) \rangle = \underbrace{(2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3)}_{k_i u \ll 1} \underbrace{B^Q(k_1, k_2, k_3)}_{\text{bispectrum}}$$

$$B^Q(k_1, k_2, k_3) = \frac{\gamma H^2}{12} \underbrace{S(k_1, k_2, k_3)}_{\text{shape Function}}$$

$$S(k_1, k_2, k_3) = \left(\prod_{i=1}^3 \frac{1}{k_i^3} \right) A(k_i)$$

coefficiente di non gaussianità F_{NL} :

1.

$$F_{NL}^{\mathcal{Q}}(k) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{Q}} \frac{B(k, k, k)}{P^2(k)} = \frac{2}{H^2} \left[1 + \mathcal{J}(k) - \ln|3k_4| \right]$$

↳ dimensionless per campi atimensionali.

→ effetti di non gaussianità rilevanti $F_{NL} \gtrsim \mathcal{O}(1)$

CASO SINGLE FIELD SLOW-ROLL INFLATION.

→ campo scalare con cui bisogna lavorare non è ϕ , ma $\mathcal{J}(\bar{x}, t)$, cioè perturbazione di curvatura su ipersuperficie a densità di energia uniforme.

$$\mathcal{J}(\bar{x}, t) \longleftrightarrow \left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{CMB}}$$

↓
dimensionless.

$$ds^2 = a^2 [d\eta^2 - (dx^i)^2]$$

$$\mathcal{J}^{(1)} = A + \frac{H}{\phi_0} \phi$$

→ termini di interazione per $\mathcal{J}$ si occorrono quando si fa uno studio non-lineare della teoria.

$$B^{\mathcal{J}}(k_1, k_2, k_3) = B^{\mathcal{J}_{\text{local}}} + B^{\mathcal{J}_{\text{quint}}}$$

$\mathcal{J}_{\text{local}}$ shape max
picca grande
 $k_1, k_2 \gg k_3$

$\mathcal{J}_{\text{quint}}$ shape picca max
quando $k_1 = k_2 \gg k_3$

$$\begin{cases} F_{NL}^{\text{local}} = 6 \times 10^{-24} \\ F_{NL}^{\text{quint}} = \frac{5}{3} \eta \end{cases}$$

$$\forall F_{NL} \neq 0$$

$$F_{NL} \lesssim 10^{-2}$$

da const. sperimentali su $(\mathcal{E}/4)$.

— dati sperimentali nel CMB:

13

$$\begin{cases} F_{NL}^{\text{local}} = 0.8 \pm (5) \rightarrow 1 \text{ sigma.} \\ F_{NL}^{\text{quil}} = -4 \pm 6.5 \end{cases}$$

→ slow-roll infl. compatibile con l'esperimento.



— è importante studiare anche modelli alternativi, come modelli multi-campo •
modelli di gravità modificata che tipicamente
prevedono $F_{NL} \sim O(1)$ e sono ~~tipicamente~~ compatibili con le
osservazioni

FINE