

Appunti per il corso

"Cosmologia dell'Universo primordiale"

Nicola Bartolo

2018-2019

Orizzonti cosmologici

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (1)$$

$d_H(t)$ definisce il raggio di una sfera (centrata sull'osservatore O) entro la quale si trovano l'insieme di punti che sono stati in connessione causale con l'osservatore. In altre parole $d_H(t)$ rappresenta la ~~max~~ massima distanza i punti di massima distanza con i quali l'osservatore O è entrato in connessione causale.

Per ottenere (1): $ds^2 = 0$ per un segnale di luce.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) dl^2$$

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$ds^2 = 0 \Rightarrow dl = \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \Rightarrow \text{proper distance } a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}$$

Alcune osservazioni:

- si tratta dell'orizzonte per il passato

- se $d_H = \infty$ non c'è orizzonte; se d_H esiste finito la superficie sferica di raggio d_H centrata in O si dice "particle horizon" dell'osservatore al tempo t .

□ Espressioni di $d_H(t)$ per la cosmologia standard ($p = w\rho$)

$$a(t) \propto t^2$$

$$\lambda = \frac{2}{3(1+w)}$$

$$\Rightarrow d_H(t) = \frac{3(1+w)ct}{1+3w} \sim ct \sim \frac{c}{H(t)}$$

soluzione per $\Omega_w = 1$

$$H(t) = H_0 \frac{t_0}{t} = \frac{2}{3(1+w)t}$$

converge per $\lambda < 1$ in $t=0$,

N.B. : $\lambda < 1 \Leftrightarrow w > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \ddot{a} < 0$ per l'eq. di Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a$$

o.e. in un universo ad espansione decelerata l'orizzonte esiste -

□ Esempi particolari: - $d_H(t) = 3ct$, per Universo piatto e fatto di polvere ($w=0$) (Einstein-de Sitter)

- $d_H(t) = 2ct$, Universo piatto e fatto di radiazione -

□ distinzione tra "particle horizon" orizzonte e "Hubble sphere"

(4)

$$R_c = \frac{c}{H}$$

$$\Omega_w = 1 \rightarrow H(t) = \frac{2}{3(1+w)t} \Rightarrow R_c = \frac{3}{2}(1+w)ct = \frac{(1+3w)}{2} d_H(t) \sim d_H(t) \quad (w > -\frac{1}{3})$$

N.B.

Definendo "Hubble time" come tempo caratteristico di espansione dell'Universo

$$R_c = c \tau_H = c \frac{a}{\dot{a}} \quad \tau_H = \frac{a}{\dot{a}} = \frac{1}{H}$$

Importante: sebbene ~~per~~ accade che in un universo piatto $R_c \sim d_H$,
"Hubble sphere" e "particle horizon" sono concettualmente
diversi.

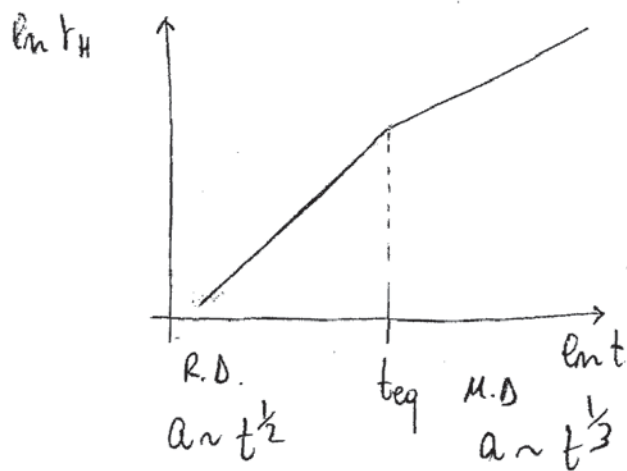
La differenza è che il "particle horizon" al tempo t , $d_H(t)$, tiene conto
dell'intera storia passata dell'osservatore fino al tempo t , mentre
il raggio di Hubble tiene conto delle connessioni causali verificatesi in
un tempo di Hubble H^{-1} .

□

$$r_H(t) = \frac{R_c}{a} = \frac{1}{\cancel{a}} \frac{1}{aH} = \frac{1}{\dot{a}}$$

②

$r_H =$ raggio comoviente di Hubble



R.D. $a(t) \propto t^{1/2} \rightarrow r_H \propto t^{1/2} \propto a$

M.D. $a(t) \propto t^{2/3} \rightarrow r_H \propto t^{1/3} \propto a^{1/2}$

N.B

$$\frac{r_H(t)}{a} = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da'}{a'} \frac{1}{aH} = \int_0^a \frac{da'}{a'} r_H$$

questo mostra che il comoving particle horizon è dato dall'integrale logaritmico del comoving Hubble radius

Osservazioni :

□ valori medi locali o globali?

□ orizzonte oggi $d_H(t_0) = \frac{2}{H_0} R_c(t_0) (w=0)$

$$= \frac{2}{H_0} = 2 \times 3'000 h^{-1} \text{ Mpc}$$

Limiti importanti : $\sim 100 \text{ Mpc} - 3'000 \text{ Mpc}$ (vale dove posso adottare RW)

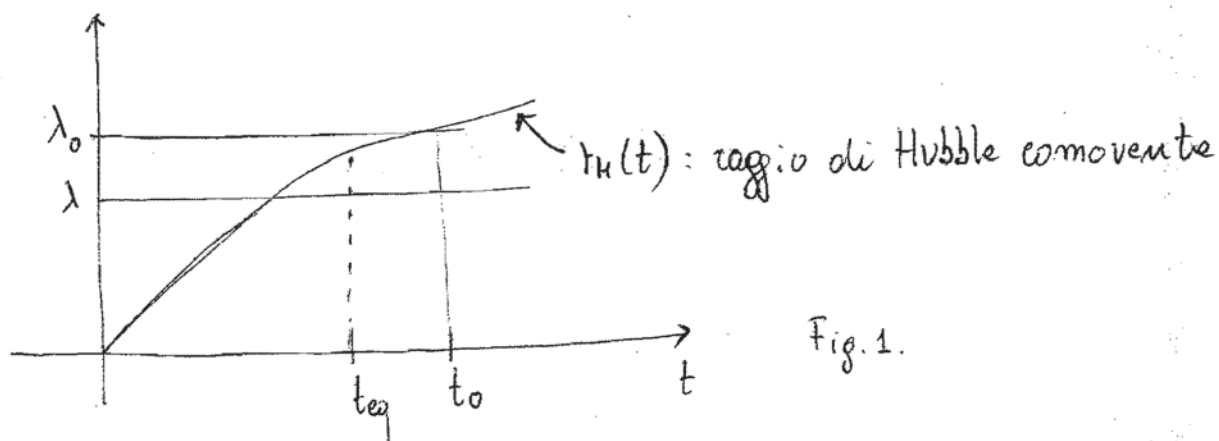
$$H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \text{ (satellite Planck 2015)}$$

N.B. : $\lambda_{\text{phys}} = a \lambda_{\text{com}}$ in riferimento al grafico di $r_H(t)$.

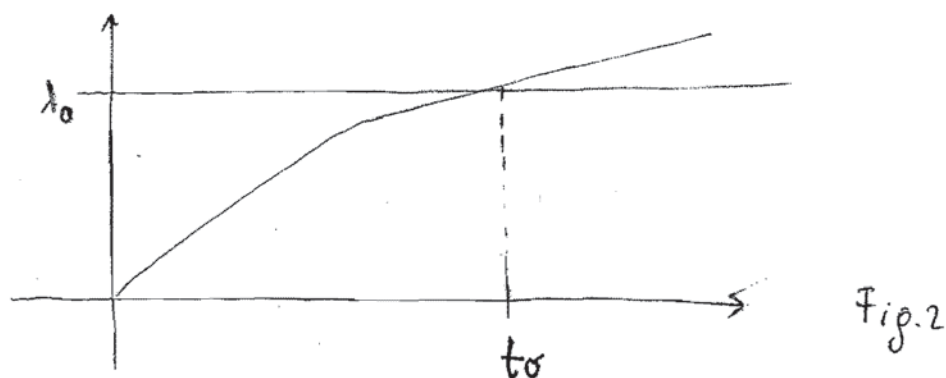
PROBLEMA dell'ORIZZONTE

Una regione di lunghezza caratteristica λ può diventare causalmente connessa solo quando $r_h = \lambda$.

Consideriamo gli usuali modelli di Friedmann (caso piatto per semplicità)



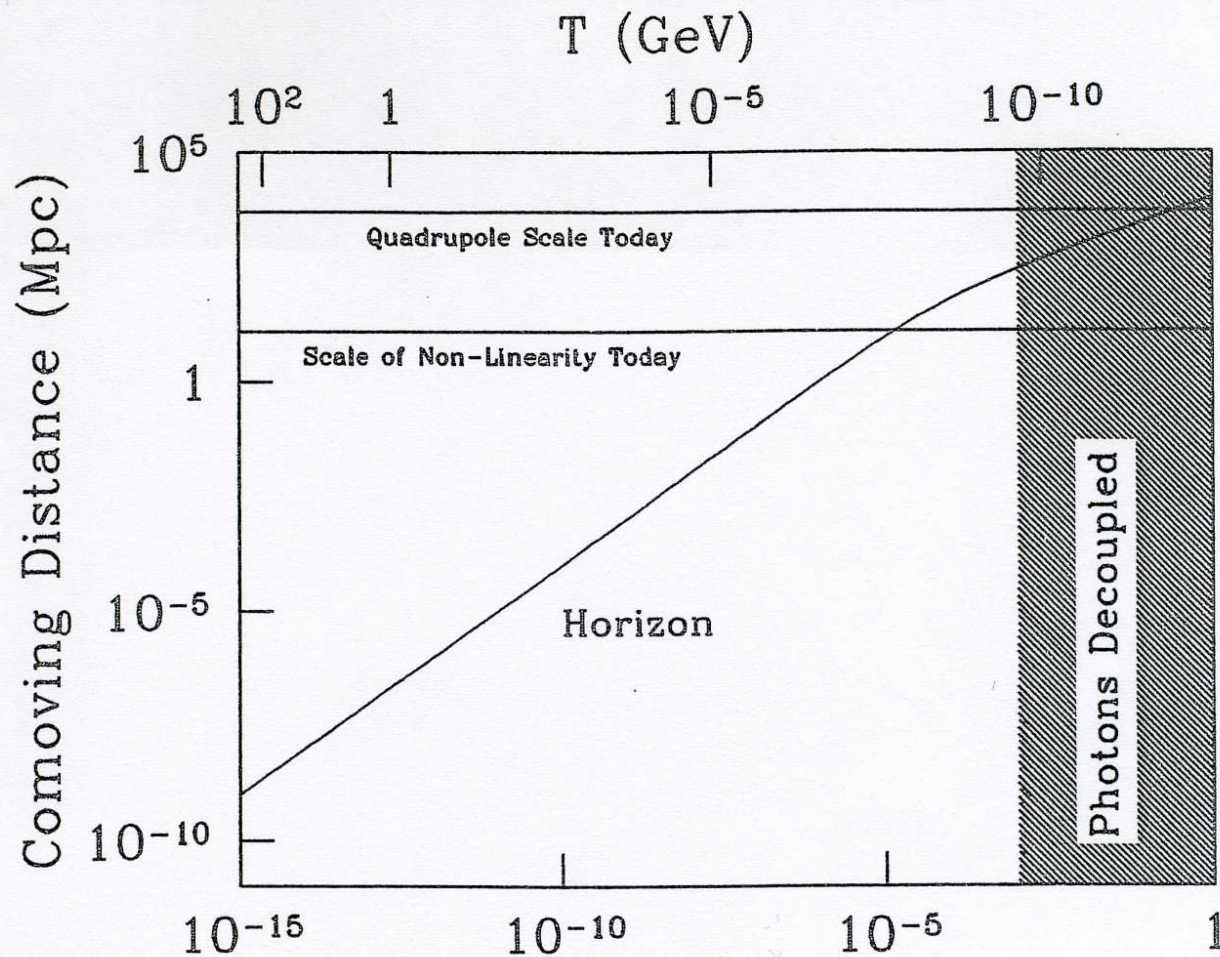
→ $\lambda_c = \text{const}$ - entra nell'orizzonte a un certo $t = t_H(\lambda)$: $\lambda_c = r_H(t_H(\lambda))$.
Questo vuol dire che processi che si verificano a t non possono commettere causalmente la regione di dimensioni λ fino a $t \leq t_H$ quando



E quindi il problema dell'orizzonte è il seguente:

come mai zone che non erano in connessione causale hanno caratteristiche simili, come l'omogeneità e l'isotropia, anche se all'epoca non potevano comunicare?

N.B.: l'esempio di figura 2 si può semplicemente applicare al caso di long-wavelengths per il CMB - (vedi Dodelson box + Fig 6.1)



from S. Dodelson's book "Modern Cosmology"

a

Figure 6.1. The comoving horizon as a function of the scale factor. Also shown are two comoving wavelengths, which remain constant with time. Early in the history of the universe, both of these modes — as well as all other modes of cosmological interest — had wavelengths much larger than the horizon. The CMB comes from the last scattering surface at $a \simeq 10^{-3}$. At that time, the largest scales (e.g., the one labeled "quadrupole") were still outside the horizon. The horizon problem asks how regions separated by distances larger than the horizon at the last scattering surface can have the same temperature.

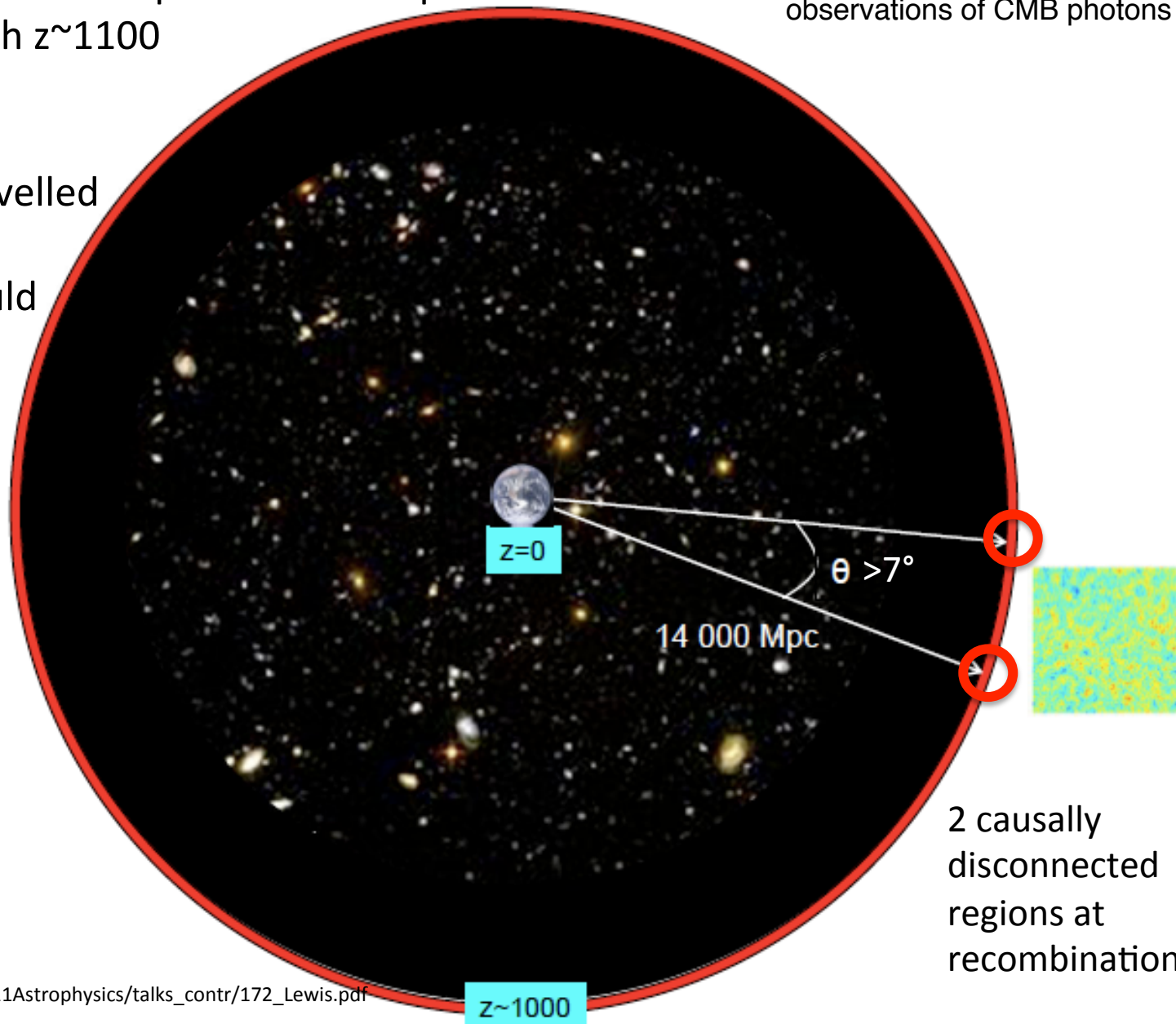
THE HORIZON PROBLEM

Here we give a viewpoint on the horizon problem which connects directly with observations of CMB photons

Last scattering surface: CMB photons decouple at recombination epoch $z \sim 1100$ ($t_r \sim 380,000$ years)

Light could have travelled $L \sim c t_r$ (horizon)
Such a distance would subtend an angle of about 1 degree.

We actually see CMB photons with nearly the same T at bigger angular scales $> 7^\circ$ (e.g. COBE satellite)

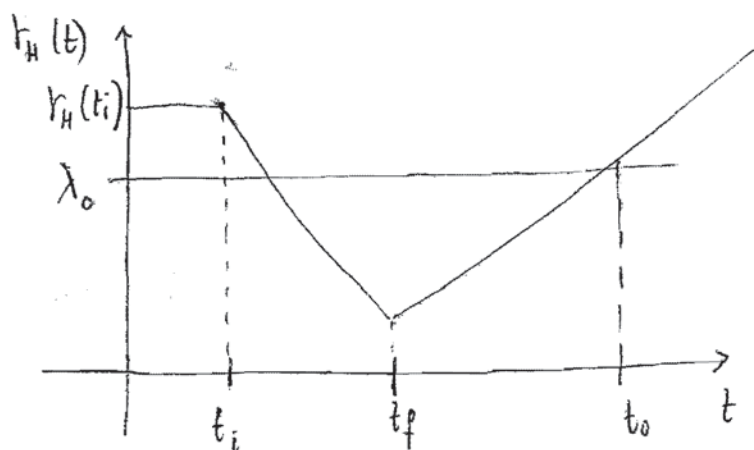


2 causally disconnected regions at recombination

SOLUZIONE INFLAZIONARIA :

(7)

Posso risolvere il problema dell'orizzonte pensando che in una prima fase dell'universo r_H sia diminuito



in questo modo le regioni di dimensioni λ ~~entrano~~ che entrano per la prima volta nell'orizzonte, in realtà erano già diventate causalmente connesse durante questa prima fase dell'universo $\Rightarrow$ ho risolto il problema della connessione causale.

In termini quantitativi:

$$r_H = \frac{1}{\dot{a}} \Rightarrow \dot{r}_H = \left(\frac{1}{\dot{a}} \right)' = - \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{a} > 0}$$

Quindi parleremo di inflazione in tutta generalità quando si ha che $\ddot{a} > 0$; ovvero l'espansione dell'universo procede in modo accelerato, cioè l'universo si è fortemente espanso (inflazione gonfiare).

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a > 0 \Leftrightarrow p < -\frac{1}{3}\rho \Leftrightarrow w = \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3}, \text{ cioè } \underline{\text{pressione negativa}} \text{ e con } p < -\frac{1}{3}\rho$$

N.B. : Per risolvere il problema dell'orizzonte, non è sufficiente dire

che $\ddot{a} > 0$, ma ciò deve avvenire per un periodo sufficientemente lungo (8)

N.B : Importante accennare a cosa succede in termini di $\lambda_{\text{phys}} \propto a$, e non solo comoventi.

Una regione di dimensioni $a(t_i) r_H(t_i)$ si "gonfia" di un fattore

$$Z = \frac{a(t_f)}{a(t_i)}$$

$$Z = \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \exp \int_{t_i}^{t_f} dt' H(t') = e^{N_{\text{inf}}} \rightarrow n^{\circ} \text{ di e-foldings}$$

$$N_{\text{inf}} = \int_{t_i}^{t_f} dt' H(t') = \log \left(\frac{a_f}{a_i} \right)$$

$$N = \log\left(\frac{a_f}{a_i}\right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt$$

Calcolo del n. di e-folds necessario per risolvere il problema dell'orizzonte (2)

$$z_H(t_0) \leq z_H(t_i)$$

$$a_0 z_H(t_0) = H_0^{-1} \leq z_H(t_i) a_0 = z_H(t_i) a_i \frac{a_0}{a_i} = H_i^{-1} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_i}{a_0}\right) H_0^{-1} \leq H_i^{-1}$$

$$\left(\frac{a_i}{a_f}\right) \left(\frac{a_f}{a_0}\right) H_0^{-1} \leq H_i^{-1} \rightarrow e^{-N} \left(\frac{T_0}{T_f}\right) H_0^{-1} \leq H_i^{-1} \Rightarrow$$

$$N \geq \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \ln\left(\frac{H_i}{T_f}\right)$$

$\uparrow$ 10^{13} GeV
 $\downarrow$ 10^{-42} GeV

$$N \gtrsim (60 \div 70)$$

T_f : temperatura di reheating

$$H_i^2 \approx \frac{8\pi}{3 M_{Pl}^2} \cdot \rho_r \sim \frac{8\pi}{3 M_{Pl}^2} \cdot \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \sim \frac{T_f^4}{M_{Pl}^2} \sim \frac{T_f^4}{T_{Pl}^2}$$

$$\Rightarrow N \geq \ln\left(\frac{T_0}{H_0}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_{Pl}}\right)$$

~ 67

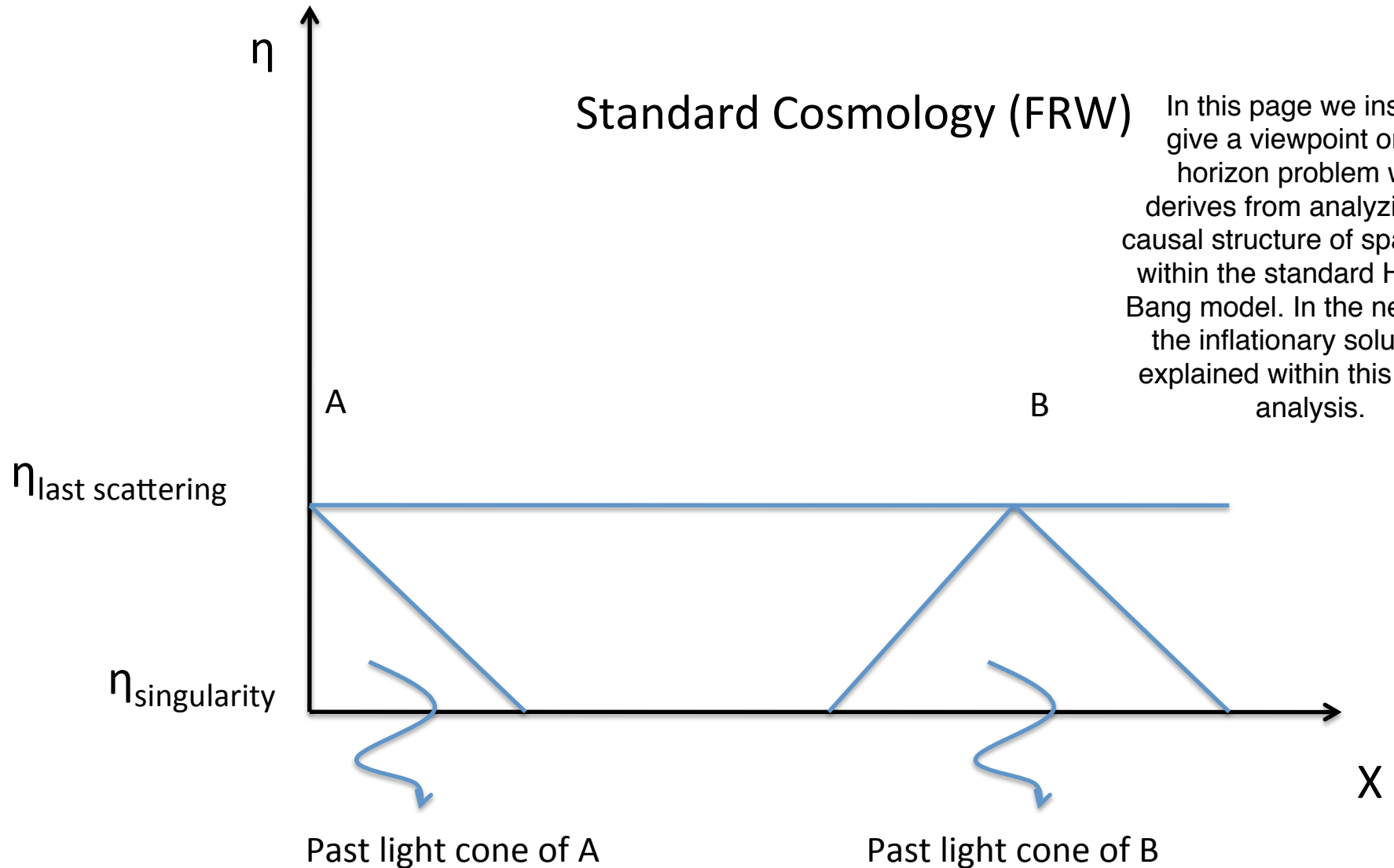
$\in [0, -1]$

si considera un intervallo $10^{-5} \leq \frac{T_f}{T_{Pl}} \leq 1$

$$N \geq [56, 67]$$

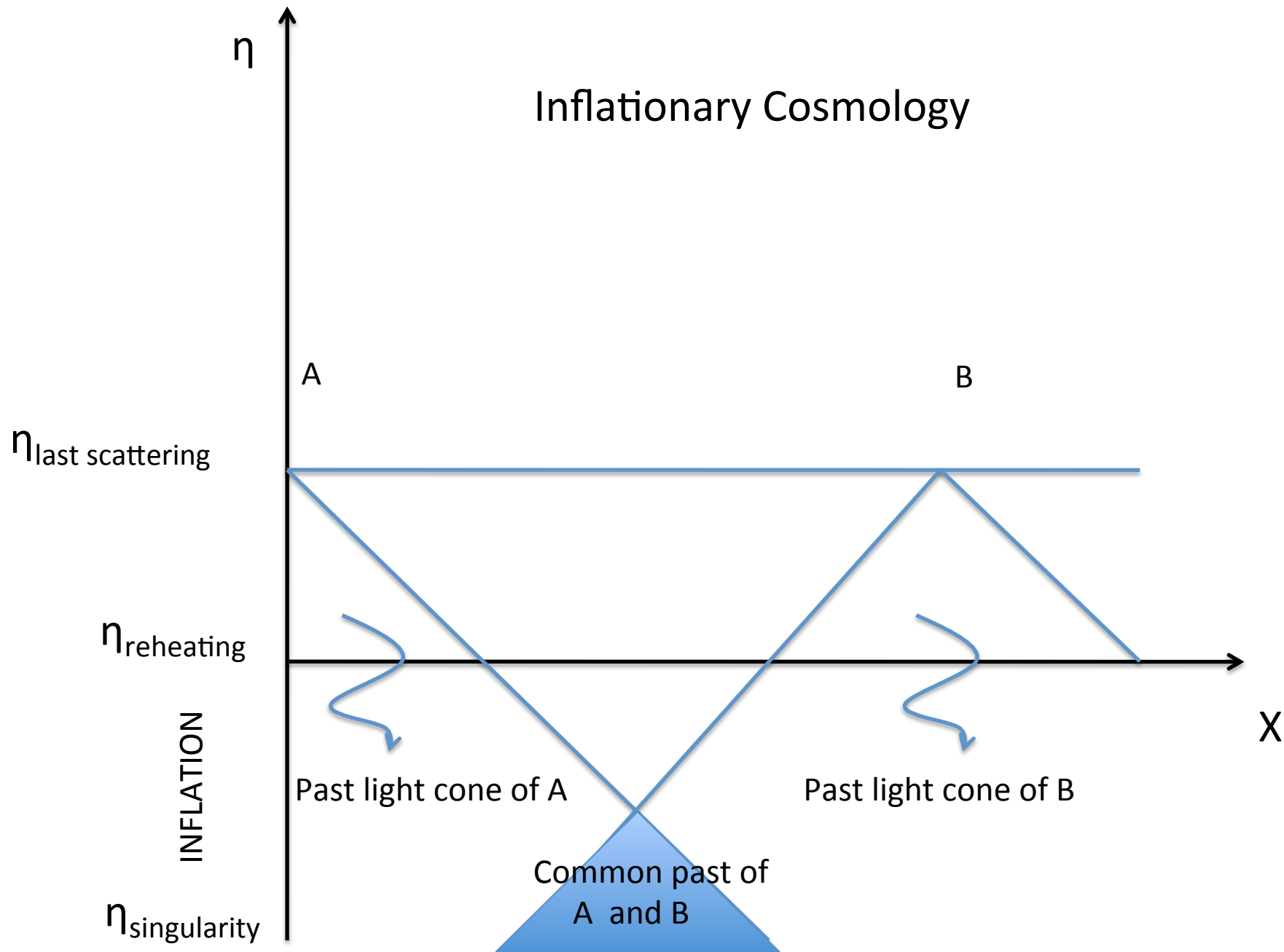
Standard Cosmology (FRW)

In this page we instead give a viewpoint on the horizon problem which derives from analyzing the causal structure of space-time within the standard Hot Big-Bang model. In the next page the inflationary solution is explained within this kind of analysis.



A and B never communicated with each other

Inflationary Cosmology



Problema della piattezza (modo veloce di impostare il problema e la soluzione) 100

$$\begin{cases} H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -3H(\rho + p) \rightarrow (2) \quad \rho \propto a^{-3(1+w)} \end{cases}$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{3H^2}{8\pi G} \cdot \frac{8\pi G \rho}{3H^2}$$

Quindi, dividendo per H^2 , da (1) ho:

$$\boxed{\Omega(t) - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{k}{\dot{a}^2} \equiv k r_H^2(t)}$$

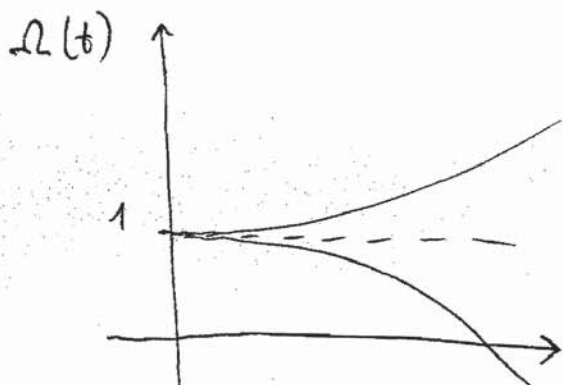
Se l'univ. è perfettamente piatta $\Omega(t) = 1$; se $\Omega(t) \neq 1$ anche per una piccola quantità, siccome durante l'epoca dominata dalla radiazione e dalla materia

$r_H(t)$ cresce, $|\Omega(t) - 1|$ cresce col tempo.

(col tempo il termine k diventa sempre più importante)

$$R.D.: H^2 \propto \rho \propto a^{-4} \rightarrow |\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2 a^{-4}} = a^2$$

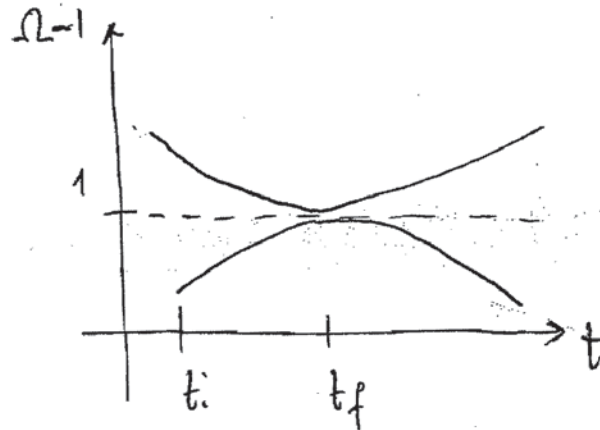
$$M.B.: \rho \propto a^{-3} \rightarrow |\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2 a^{-3}} = a$$



Soluzione inflazionaria per il problema della piattezza:

$$\Omega(t) - 1 = k r_H^2(t)$$

durante l'inflazione $\ddot{a} > 0$ e $r_H(t)$ decresce molto rapidamente $\Rightarrow$



ho un andamento asimmetrico e durante l'inflazione $|\Omega - 1|$ viene schiacciato molto vicino allo zero.

Ricordiamo i limiti osservativi più recenti su $(-\Omega_0 + 1) \equiv \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}$:

$$|\Omega_k| < 0.005 \text{ (95\% C.I.)}, \text{ quindi deduciamo } |\Omega_k| < 10^{-2} \text{ (95\% C.I.)}$$

Dalla equazione di constraint di Friedmann è utile ricavare la Eq. (*)

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho a^2 - k =$$

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{k}{\dot{a}^2}$$

$$k + \dot{a}^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho a^2$$

$$\frac{8}{3} \pi G \rho a^2 = \Omega(t) \cdot \dot{a}^2 = \Omega(t) \cdot \frac{k}{\Omega(t) - 1} \Rightarrow$$

$$(1 - \Omega^{-1}) \cdot \rho a^2 = \text{const.}$$

$$\boxed{(1 - \Omega^{-1}) \rho a^2 = \text{const}} = (\Omega_0^{-1} - 1) \rho_0 a_0^2 \quad (*)$$

$$t < t_{\text{eq}}:$$

$$(\Omega^{-1} - 1) \cdot \rho_{\text{eq}} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a} \right)^4 \cdot \frac{a^2}{a_0^2} \cdot \frac{1}{\rho_0} = (\Omega_0^{-1} - 1)$$

$$\rho_{\text{eq}} = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}} \right)^3$$

$$(\Omega^{-1} - 1) \cdot \cancel{\rho_0} \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}} \right)^3 \cdot \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a} \right)^4 \cdot \frac{a^2}{a_0^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\rho_0}} = (\Omega_0^{-1} - 1)$$

$$(\Omega^{-1} - 1) \frac{a_0 \cdot a_{\text{eq}}}{a^2} = (\Omega_0^{-1} - 1)$$

$$(\Omega^{-1} - 1) = (\Omega_0^{-1} - 1) \frac{a^2}{a_0 \cdot a_{\text{eq}}} = (\Omega_0^{-1} - 1) \cdot (1 + z_{\text{eq}})^{+1} \cdot \left(\frac{T_0}{1} \right)^2$$

$$(1 + z_{\text{eq}}) \approx 2.34 \times 10^4 \Omega_m h^2$$

$$\rightarrow (\Omega^{-1} - 1) \approx (\Omega_0^{-1} - 1) \cdot \left(\frac{T_{\text{PI}}}{1} \right)^2 \cdot 10^{-60} (\Omega_m h^2)^2 \rightarrow \Omega(t_{\text{PI}}) \approx 1 + (\Omega_0 - 1) \cdot 10^{-60}$$

calcolo aggiuntivo del parametro di densità a tempi primordiali

Per tanto, visto che $|\Omega_0 - 1| < 10^{-2} \rightarrow |\Omega - 1|_{t_{PI}} < 10^{-62}$; (100 D10)

quindi se oggi c'è anche una piccola deviazione di Ω_0 da 1, a tempi primordiali Ω deve essere determinato ad essere vicino ad 1 con una precisione di una parte su 10^{62} (almeno), senza essere esattamente 1 (problema di "fine-tuning").

Qui abbiamo scelto $t = t_{PI}$, ma se anche scegliessimo $t = t_{nucleosintesi}$ ($T_N \approx 1 \text{ MeV}$) otterremmo in ogni caso $|\Omega - 1|_{t_{nuc.}} < 10^{-18}$.

Calcolo del m. e-folds necessario per risolvere il problema (13)

$$(\Omega_i^{-1} - 1) \rho_{ai}^2 = (\Omega_0^{-1} - 1) \rho_{ao}^2 \quad \text{della piattezza}$$

$$\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}} \geq 1 : \text{condizione per risolvere il problema della piattezza.}$$

$$(\Omega_i^{-1} - 1) = (\Omega_0^{-1} - 1) \frac{\rho_{ao}^2}{\rho_{ai}^2} = (\Omega_0^{-1} - 1) \frac{\rho_{ao}^2}{\rho_{aq}^2} \frac{\rho_{eq}^2}{\rho_{af}^2} \frac{\rho_{af}^2}{\rho_{ai}^2}$$

In tutta generalità:

$$\frac{\rho_{af}^2}{\rho_{ai}^2} \sim \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3W_{inf})}$$

$$\left(\frac{a_o}{a_{eq}} \right)^{-1} \downarrow \left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3W_{inf})} \downarrow \left(\frac{a_{eq}}{a_f} \right)^{-2}$$

e consideriamo i periodi:

$$t_{inf} \propto a^{-3(1+W_{inf})}; \quad W_{inf} < -\frac{1}{3}$$

$$[t_f, t_{eq}] : \rho \propto a^{-4}$$

$$[t_{eq}, t_o] : \rho \propto a^{-3}$$

$$\left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3W_{inf})} = \frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\Omega_0^{-1} - 1} \cdot X$$

$$X = \frac{a_o}{a_{eq}} \left(\frac{a_i}{a_{eq}} \right)^2 \left(\frac{a_{eq}}{a_f} \right)^2 = \frac{a_o a_{eq}}{a_f^2} = (1+z_{eq})^{-1} \left(\frac{T_f}{T_o} \right)^2 = (1+z_{eq})^{-1} \left(\frac{T_{PI}}{T_o} \right)^2 \left(\frac{T_f}{T_{PI}} \right)^2$$

$$\approx 10^{60} \cdot \left(\frac{T_f}{T_{PI}} \right)^2$$

$$N \geq \frac{\ln(X)}{|1+3W_{inf}|} = \frac{60 \left[2.3 + \frac{1}{30} \ln \left(\frac{T_f}{T_{PI}} \right) \right]}{|1+3W_{inf}|}$$

$$\text{se } W_{inf} \approx -1 \text{ e } 10^{-5} \frac{T_f}{T_{PI}} \leq 1 \rightarrow N \geq 60 \div 70.$$

$$N_{\min} \in (60 \div 70)$$

Predizione dei modelli inflazionari
per il parametro di densità oggi Ω_0

(14)

$$N \geq N_{\min}$$

$$N = p \cdot N_{\min} \quad p > 1$$

relazione tra $(\Omega_0^{-1} - 1)$ e $(\Omega_i^{-1} - 1)$: dal calcolo di prima

$$\left(\frac{a_f}{a_i} \right)^{-(1+3W_{\inf})} \sim \frac{(1 - \Omega_i^{-1})}{(1 - \Omega_0^{-1})} \cdot X \sim \frac{(1 - \Omega_i^{-1})}{(1 - \Omega_0^{-1})} e^{N_{\min} |1+3W_{\inf}|}$$

$$N_{\min} = \frac{\log X}{|1+3W_{\inf}|}$$

$$\rightarrow e^{p N_{\min} |1+3W_{\inf}|} \sim \left(\frac{1 - \Omega_i^{-1}}{1 - \Omega_0^{-1}} \right) \cdot e^{N_{\min} |1+3W_{\inf}|}$$

$$\rightarrow (\Omega_0^{-1} - 1) \sim \frac{\Omega_i^{-1} - 1}{\exp[(p-1)N_{\min} |1+3W_{\inf}|]} \sim \underbrace{(\Omega_i^{-1} - 1)}_{\sim 1} 10^{-[60 + \ln(\frac{1}{T_{pl}})]}$$

se prendo per esempio $p=2$ e
 $W_{\inf} \approx -1$

Poiché durante l'inflazione $H \approx \text{const.} \rightarrow$

$$|\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2 H^2} \propto \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} \sim \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N}$$

Prendo $|\Omega - 1|_{t_i} \sim 1$.

Ricordando che oggi $|\Omega_0 - 1| < 10^{-2}$ e che $\Omega(t_{PI}) \approx 1 + (\Omega_0 - 1) \times 10^{-60}$,
richiederemo che $|\Omega - 1|_{t_{PI}} < 10^{-62}$

Se prendo $|\Omega - 1|_{t_f} \sim |\Omega - 1|_{t_{PI}} \Rightarrow$ devo richiedere $\boxed{N \geq 70}$

Il calcolo qui sopra è un altro modo di vedere se le n^2 di e-folds necessari per risolvere il problema della piattezza (più approssimato e veloce di quello a pag. 13). Mette in evidenza il carattere di soluzione attrattiva dell'inflazione verso quelle condizioni iniziali che attualmente, nell'ambito del modello del Big-Bang caldo, apparirebbero come estremamente peculiari.

A huge expansion

Take a region of size $\lambda_H = 1/H_{\text{infl}}$ at the beginning of inflation:

$$\text{number of e-foldings } N = \ln(a_f/a_i) = \int_{t_i}^{t_f} H dt \geq 60$$



Since $\lambda_H \propto a(t)$, it gets inflated by $\frac{a_f}{a_i} \geq e^{60} \simeq 10^{26}$!!!!

