1. DINAMICA dell' INFLAZIONE –

2. PERTURBAZIONI COSMOLOGICHE dall' INFLAZIONE –

Inflazione : un periodo durante il quale

$$\ddot{a} > 0$$

per un tempo sufficiente da poter risolvere i problemi dell' orizzonte e della piattezza

$$\ddot{a} > 0 \iff p < -\frac{1}{3}\rho$$

N.B : no RADIATION o MATTER - DOMINATED PHASE $\Rightarrow$ di sicuro inflazione avviene prima della nucleosintesi primordiale ($t_{NUCL} \sim 1\,sec$; $T_{NUCL} \sim 1MeV$)

Ricordiamo che una fase di de-Sitter è un periodo durante il quale $p = -\rho$ – $(w = -1)$

$$\begin{cases} H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho \\ \dot{\rho} = -3H(\rho + p) \end{cases} \longrightarrow \rho = \text{cost} \Rightarrow H = \text{cost} \Rightarrow a = a_i e^{H(t-t_i)}$$

(curvature K is soon redshifted away)

X Ricorda definizione n°. e-foldings $N_{TOT} = \int_{t_i}^{t_f} H dt$ che deve essere almeno compreso fra 50 e 70 –

Chi è un possibile candidato con $p < -\frac{1}{3}\rho$?

Un campo scalare.

Di seguito consideriamo:

1. Perché un campo scalare? Come si descrive in un universo in espansione, quali sono le sue caratteristiche?
2. Come si studia la dinamica di un campo scalare in un universo in espansione?
3. Caratterizzazione di vari modelli.
4. Da fluttuazioni quantistiche dell' inflatone alle prime perturbazioni di densita` (che danno poi origine alle fluttuazioni in temperatura del CMB e a tutte le strutture che osserviamo nell' universo).

Un tipico esempio di una fase di de-Sitter si ha se la densità di energia è dominata da una costante cosmologica:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3} \rightarrow a \propto \exp\left(\frac{\Lambda}{3} t\right)$$

Il termine cosmologico Λ fu introdotto da Einstein in quanto preserva la covarianza generale delle eq. di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1)$$

N.B. (1) vale con segnatura $(-,+,+,+)$

(in questo senso Λ ha un significato geometrico).

D'altra parte la attuale interpretazione è quella che ρ_Λ, e p_Λ siano la pressione e la densità di energia del vuoto quantistico, inteso come lo stato di base di un sistema quantistico (qualsiasi contributo particellare alla densità di energia del vuoto).

Questo lo si vede considerando che il tensore energia-momento sullo stato di vuoto deve essere Lorentz invariante e quindi:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\langle \rho \rangle g_{\mu\nu}$$

Quindi $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ si comporta come Λ (sarebbe una $\Lambda = 8\pi G \langle \rho \rangle$).

Viceversa si può dire che la costante cosmologica contribuisce alla energia totale del vuoto con una $\rho_{vuoto} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Questo fa capire che in presenza di gravità bisogna tenere da conto anche l'energia del vuoto, e che questa non può più essere messa a zero come si fa in uno schema piatto di Minkowski.

A cosa ci riferiamo quando parliamo della energia del vuoto?

All'energia relativa alle fluttuazioni quantistiche sullo stato di vuoto (in Minkowsky è infinita, la posso porre $=0$, ridefinendo il punto zero; in presenza di gravità sento tutto per il principio di equivalenza). Non è vero che nel vuoto quantistico non ci sono particelle: queste sono continuamente create e distrutte.

A parte l'esempio della costante cosmologica, un altro è relativo all'effetto Casimir:

se si prendono due piastre metalliche neutre molto vicine, pure in assenza di cariche si misura una forza (attrattiva)

esempio: due piastre metalliche piane ad una distanza dell'ordine di un micrometro

Quello che succede è che il vuoto "si accorge" che ci sono le piastre (è una condizione al contorno che si impone al campo e.m.)

È l'esempio di una forza con $p<0$ dovuta al vuoto quantistico.

NB: è un esempio in cui si capisce che x definire uno stato di vuoto è importante considerare le condizioni al contorno: lo stato di vuoto è lo stato con il massimo numero di simmetrie concesse nell'ambiente in cui "vive" (per uno spazio di Minkowski il vuoto è invariante per il gruppo di Poincaré

Si parla di "ambiente" perche` oltre allo spazio-tempo posso avere delle condizioni al contorno (per esempio di tipo topologico). Queste possono modificare lo stato di vuoto. Pertanto lo stato di vuoto va definito caso per caso tenendo eventualmente da conto di condizioni al contorno.

Che tipo di campo può dare le fluttuazioni quantistiche tali che $p < -\frac{1}{3}\rho$?

Come anticipazione di quello che verrà spiegato meglio in seguito il tensore energia momento di un campo scalare è:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + \mathcal{L}_\varphi g_{\mu\nu}$$

con $\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - V(\varphi)$

Ora supponete che $\underbrace{\varphi = \langle\varphi\rangle}_{\text{valor medio di } \varphi \text{ sullo stato di vuoto}} = \text{cost.}$ corrisponde al minimo del potenziale (classico) (lo stato di base del sistema) $\Rightarrow$

$T_{\mu\nu} = -V(\langle\varphi\rangle)\,g_{\mu\nu}$: energia del vuoto associata al campo scalare.

Quindi prendiamo un campo scalare sullo stato di vuoto:

$\langle 0|\varphi|0\rangle \equiv \langle\varphi\rangle \neq 0$

Essendo un campo scalare, in un universo di Robertson-Walker non può che essere $\langle\varphi\rangle = f(t)$

NB: non posso avere $\langle A_\mu\rangle \neq 0$: con un quadrivettore avrei una direzione privilegiata, non ammissibile in R.W.

non posso avere $\langle\psi\rangle \neq 0$ (fermioni): ancora individua una direzione privilegiata

Potrei avere $\langle\psi\bar{\psi}\rangle \neq 0$ (condensato fermionico) se è uno scalare. Proposti in fisica delle particelle nel caso che non $\exists$ scalari fondamentali: (bosone di Higgs)

introdotto nella fisica delle particelle per dare massa ai bosoni intermedi e fermioni; e nei primi modelli inflazionari si è tentato di

indentificare il campo scalare che guida l’inflazione (“inflatone”) con un qualche campo scalare di Higgs responsabile della rottura spontanea di simmetria di una qualche teoria di Grande Unificazione (GUT) ad alta energia.

Quindi la cosa più naturale è considerare un campo scalare reale $\varphi(\vec{x},t)$ tale che

$\langle 0|\varphi(\vec{x},t)|0\rangle = f(t)$, cioè il valore di aspettazione sullo stato di vuoto è al più una funzione del tempo (in R.W). Esso rappresenta il valore di background classico del campo.

- Dinamica di un campo scalare (e l'Universo si espande) 7

Il sistema si descrive con una azione (o densità di Lagrangiana)
In relatività generale :

$$S_{\Phi}[\Phi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_{\Phi}[\Phi, g_{\mu\nu}]$$

notare la dipendenza dalla metrica

quindi uno deve considerare : - campo scalare Φ
- campo gravitazionale (cioè metrica)
- resto del mondo
(fermioni, bosoni di gauge, altri campi scalari). In genere lo si descrive come un fluido_

Per un campo scalare reale :
(minimamente accoppiato**)

$$\mathcal{L}_{\Phi} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - V(\Phi)$$

(con segnatura $(-,+,+,+)$)

termine cinetico canonico

potenziale

Quindi come in uno spazio piatto di Minkowski ma con $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$ tensore metrico dello spazio curvo, e con derivate covarianti_

$V(\Phi)$: contiene, per esempio di un termine di massa del campo scalare, oppure le self-interactions del campo scalare

ex : $V(\Phi) = m_{\Phi}^2 \dfrac{\Phi^2}{2}$

massa delle particelle

$V(\Phi)$ puo` anche descrivere in maniera effettiva le interazioni del campo scalare con altri campi ("il resto del mondo"); per esempio, puo` includere correzioni quantistiche ad una loop tra il campo scalare e un qualche bosone di gauge. In genere comunque, il resto del mondo durante l'inflazione e` trascurabile (si veda quanto detto a proposito del cosmic no-hair theorem).

** per minimamente accoppiato ci si riferisce ad un termine ξΦΦR, dove ξ e` una costante di accoppiamento adimensionale. Minimamente accoppiato corrisponde a ξ=0 (ovvero assenza di questo termine).
Se ξ e` diverso da zero, questo e` un accoppiamento tra la metrica e il campo scalare che tipicamente da origine a teorie scalari-tensoriali, ovvero teorie dove la gravita` e` mediata, oltre che dalla metrica, anche dal campo scalare.

EQUAZIONE DI KLEIN-GORDON

Dall'azione S_Φ del campo scalare uno ottiene la equazione del moto:

$$\frac{\delta S_\varphi}{\delta \varphi} = 0 \rightarrow \Box \varphi = + \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

> N.B.: se segnatura metrica $(-,+,+,+)$ altrimenti con segno $-$

dove nello spazio curvo il D'Alambertiano è definito come:

$$\Box \varphi = \varphi_{;a}{}^{;a} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \varphi_{,\mu} \right)_{,\nu} \qquad \mu = 0,1,2,3$$

Consideriamo la metrica di R.W. (con $K=0$): (qui uso $(-,+,+,+)$)

$\sqrt{-g} = a^3(t)$ e

$$\Box \varphi = \frac{1}{a^3(t)} \left[\left(g^{00} a^3 \varphi_{,0} \right)_{,0} + \left(g^{ii} a^3 \varphi_{,i} \right)_{,i} \right]$$

$$\Box \varphi = \frac{1}{a^3(t)} \left[\left(-a^3 \varphi_{,0} \right)_{,0} + \left(a \varphi_{,i} \right)_{,i} \right]$$

$$\Box \varphi = -\ddot{\varphi} - 3\frac{a^2}{a^3} \dot{a} \dot{\varphi} + \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} \Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

: equazione di un campo scalare (quantistico) nella metrica di R.W.

N.B:

i) non abbiamo considerato perturbazioni nella metrica per il momento

ii) se $\varphi(\vec{x},t) \equiv \varphi_0(t)$ allora: $\nabla^2 \varphi_0 = 0$ e

$$\ddot{\varphi}_0(t) + 3H\dot{\varphi}_0(t) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}(\varphi_0)$$

Al campo scalare Φ si può associare anche un tensore energia-momento.
$T^{\varphi}_{\mu\nu}$ (deve essere un tensore e avere quadridivergenza nulla).

se segnatura $(-,+,+,+)$.

$$T^{\varphi}_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$$

Si trova:

se uso segnatura $(-,+,+,+)$.

contributi da derivate rispetto a derivate della metrica di ordine piu` elevato.

$$T^{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left[-\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\varphi)}{\partial g^{\mu\nu}} \pm \partial_\alpha \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\varphi)}{\partial \partial_\alpha g^{\mu\nu}} + \ldots\right]$$

(risultato del tutto generale)

se uso segnatura $(-,+,+,+)$

$$T^{\varphi}_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}_\varphi}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\varphi = \partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi \mp g_{\mu\nu}\left[-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \mp V(\varphi)\right]$$

tensore energia-momento per un campo scalare in Relatività Generale

(nel caso della densita` di Lagrangiana sepcificta prima).

N.B.:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}.$$

Di solito in cosmologia si può scrivere:

$$\varphi(\vec{x},t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x},t),$$

dove $\varphi_0(t)$ è il valore classico del campo ($\equiv$ il valore di aspettazione sullo stato iniziale omogeneo ed isotropo), mentre $\delta\varphi(\vec{x},t)$ rappresenta le fluttuazioni quantistiche attorno a $\varphi_0(t)$ — (ovvero la variazione di φ è la differenza tra il campo scalare e il suo valor medio sul vuoto $\varphi_0(t) \equiv \langle \varphi(\vec{x},t) \rangle \Rightarrow \langle \delta\varphi(\vec{x},t) \rangle = 0$)

Questa separazione è utile perchè le fluttuazioni quantistiche sono durante l'inflazione più piccole della dinamica, della evoluzione classica $\langle \delta\varphi^2 \rangle \ll \varphi_0^2(t)$ —

Quindi per il momento occupiamoci della evoluzione del campo classico $\varphi_0(t)$ (indichiamolo $\varphi(t)$ d'ora in avanti) —

Se il campo è omogeneo ed isotropo, cioè dipende solo dal tempo le uniche componenti $\neq 0$ del tensore energia-momento sono:

(con segnatura $(-,+,+,+)$)

$$T^0{}_0 = -\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) \equiv -\rho_\varphi$$

$$T^i{}_j = \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)\right)\delta^i_j \equiv p_\varphi \delta^i_j$$

N.B i) un campo omogeneo ed isotropo si comporta come un fluido perfetto

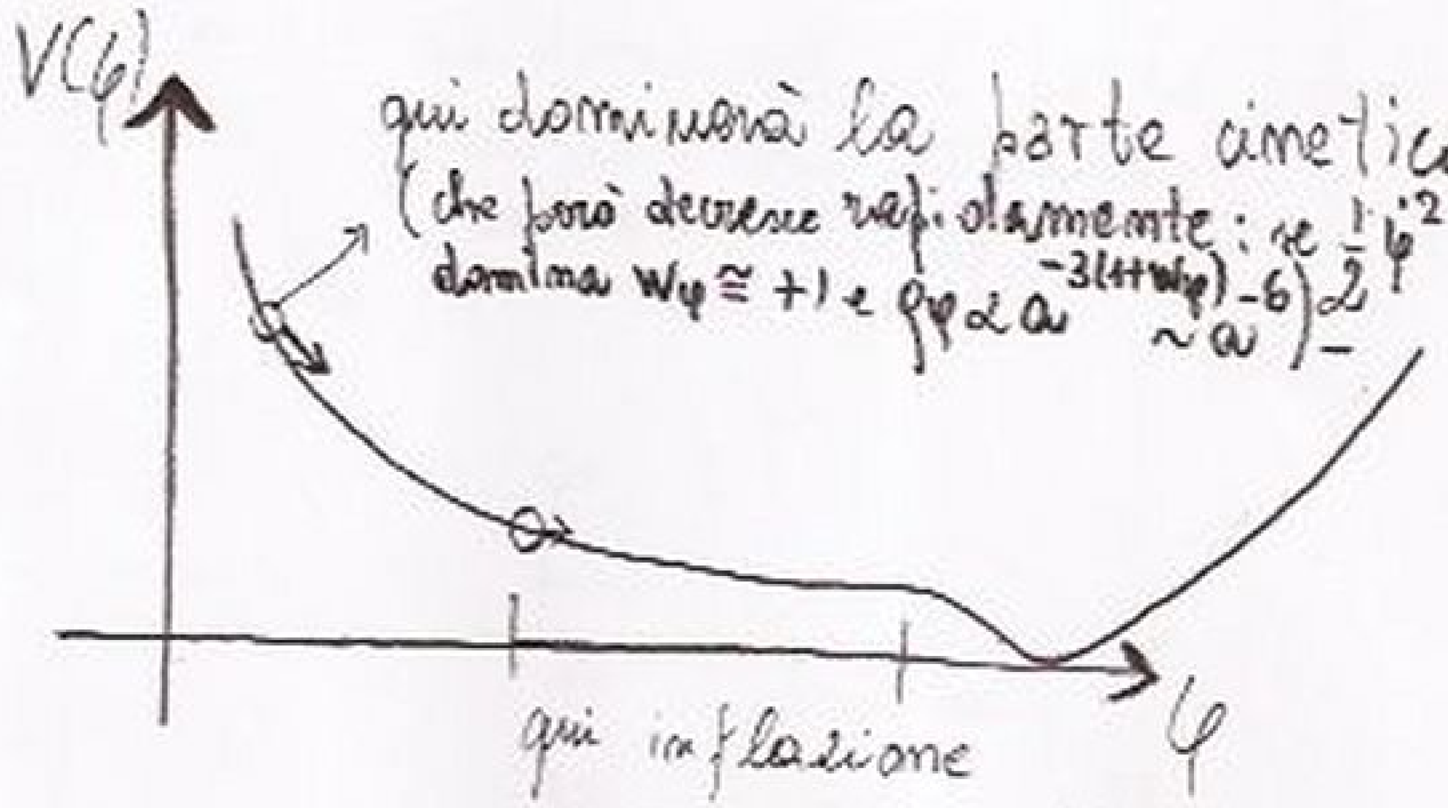
iii) la cosa importante è che in p c'è $-V(\varphi)$: è il potenziale che è un possibile candidato a dare una $p<0$_

Quindi: se $V(\varphi) \gg \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$

allora $p_\varphi \simeq -\rho_\varphi \rightarrow$ universo di de-Sitter_

Se l'universo è dominato da un campo scalare, e la energia potenziale domina quella cinetica si può avere inflazione_

N.B.



qui è come se $V(\varphi) \simeq$ costante: si comporta come una costante cosmologica

$\rightarrow$ l'Inflazione è guidata dalla energia del vuoto del campo scalare

N.B: se $a \propto e^{Ht}$ e ho materia ordinaria (barioni o radiazione/fotoni)

$\rho_r \propto a^{-4}$

$\rho_b \propto a^{-3}$

vanno a zero rapidissimamente: non appena comincia a dominare V, viene spazzato via tutto − tranne V stesso −. (no-hair cosmic theorem)

una cosa analoga dicasi per la curvatura spaziale k
(e per la stessa ragione anche qualsiasi disomogeneita' viene canellata
non appena l'inflazione inizia, giustificando cosi` l' uso della metrica di background di FRW)

Vediamo più in dettaglio la <u>dinamica inflazionaria</u>:

Dalla equazione di Klein-Gordon per un campo omogeneo ed isotropo si ha (oppure dalla conservazione del tensore energia-momento)

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad , \quad V'(\varphi) = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Nota il termine di frizione dovuto all'espansione dell'Universo.

Inoltre dalle equazioni di Friedmann:

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho_\varphi = \frac{8}{3}\pi G \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right)$$

Se richiediamo che $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$ il campo scalare sta rotolando lentamente lungo il suo potenziale $\Rightarrow$ periodo di $\boxed{\text{SLOW-ROLL}}$ (lento-rotolamento)

Questa condizione $\dot{\varphi}^2 < V(\varphi)$ è ottenuta se il potenziale è sufficientemente <u>piatto</u> $\Rightarrow$ ci possiamo aspettare che V e le sue derivate rispetto a φ variano lentamente con $\varphi \Rightarrow$ ci aspettiamo che $\ddot{\varphi}$ sia pure trascurabile

Allora
$$\begin{cases} H^2 \simeq \frac{8}{3}\pi G V(\varphi) \quad , & (1) \\ 3H\dot{\varphi} \simeq -V'(\varphi) & (2) \end{cases}$$

È come considerare una eq. $\ddot{x} + 3\Gamma\dot{x} = -\frac{F}{m}$ (eq. con attrito)
per $t > \frac{1}{\Gamma}$ $\dot{x} \simeq -\frac{F}{3m\Gamma}$, cioè F determina $\dot{x}$ e non più l'accelerazione che diventa sottodominante.

<u>Condizioni di slow-roll</u> (usando la (2))

1. $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \ll H^2$ $\left(\text{o anche } \frac{1}{\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll 1 \text{ usando la (1)}\right)$
2. $\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \Rightarrow V'' \ll H^2$ $\left(\text{o anche } \frac{1}{\pi G}\left(\frac{V''}{V}\right) \ll 1\right)$

I.N.F.N. Sezione di PADOVA

bartolo@lxpd05

Job 885

/tmp/img-pos629900

1ª condizione

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi)$$

$$9H^2\dot{\varphi}^2 = +(V')^2$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{+(V')^2}{9H^2}$$

quindi :

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \ll H^2$$

2ª condizione

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi)$$

$$3H\ddot{\varphi} \simeq -V''(\varphi)\dot{\varphi}$$

quindi :

$$\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{V''\cancel{\dot{\varphi}}}{3H} \ll 3H\cancel{\dot{\varphi}}$$

ovvero $V'' \ll 9H^2$

Pertanto è conveniente introdurre i cosiddetti <u>parametri di slow-roll</u>:

N.B.: a lezione quello che qui viene indicato con η, e` stato indicato con η_V a lezione (ovvero col pedice V). A lezione ho infatti introdotto in maniera un po piu` generale i parametri di slow-roll rispetto a quanto fatto qui.

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$\eta = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{V''}{V}\right) = \frac{1}{3}\frac{V''}{H^2}$$

Possiamo quindi anche dire che per avere un periodo di inflazione $\epsilon, |\eta| \ll 1$ (cioè il potenziale deve essere sufficientemente piatto affinché si sviluppi l'inflazione)

X Accenno a gerarchia di parametri di slow-roll.

ex: $\xi^2 = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{V'V'''}{V^2}\right)$

X accenno al fatto che $\epsilon, \eta \simeq$ cost. durante l'inflazione **

Nota che abbiamo scritto ϵ anche come $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$: ϵ quantifica di quanto il parametro di Hubble cambia nel tempo durante l'inflazione.

In particolare:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1-\epsilon)H^2},$$

quindi l'inflazione si può ottenere solo se $\epsilon < 1$ – Non appena questa condizione cessa l'inflazione finisce

** perche` risulta che la derivata rispetto al tempo di ε e di η (divisa per il parametro di Hubble H) e` di ordine due nei parametri di slow-roll, ovvero va come O(εε).

Two simple but very important examples

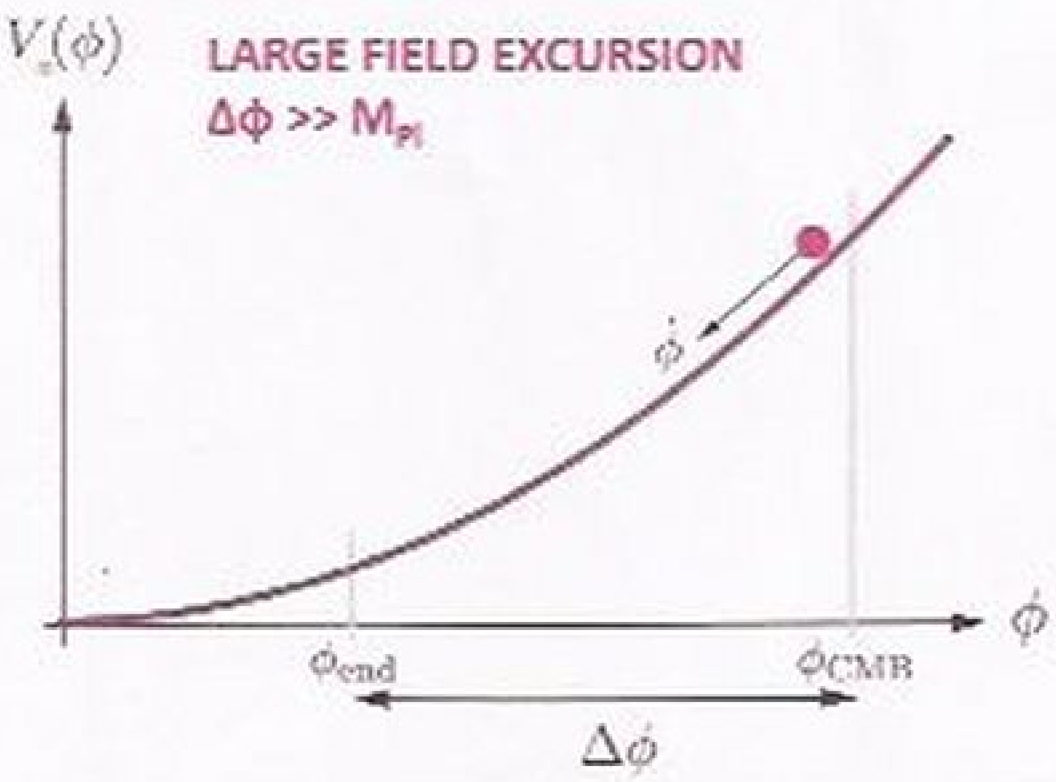
``Large field'' like potential

$$V(\phi) \propto \phi^{\alpha}$$

$$\epsilon \sim \frac{1}{\pi G}\left(\frac{V_{,\phi}}{V}\right)^2 \sim \alpha^2 \frac{1}{\pi G}\frac{1}{\phi^2} \sim \alpha^2 \frac{M_{\rm Pl}^2}{\phi^2}$$

$$\epsilon \ll 1 \Rightarrow \phi \gg M_{\rm Pl}$$

$M_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2} \equiv G^{-1/2} \simeq 10^{19} GeV$

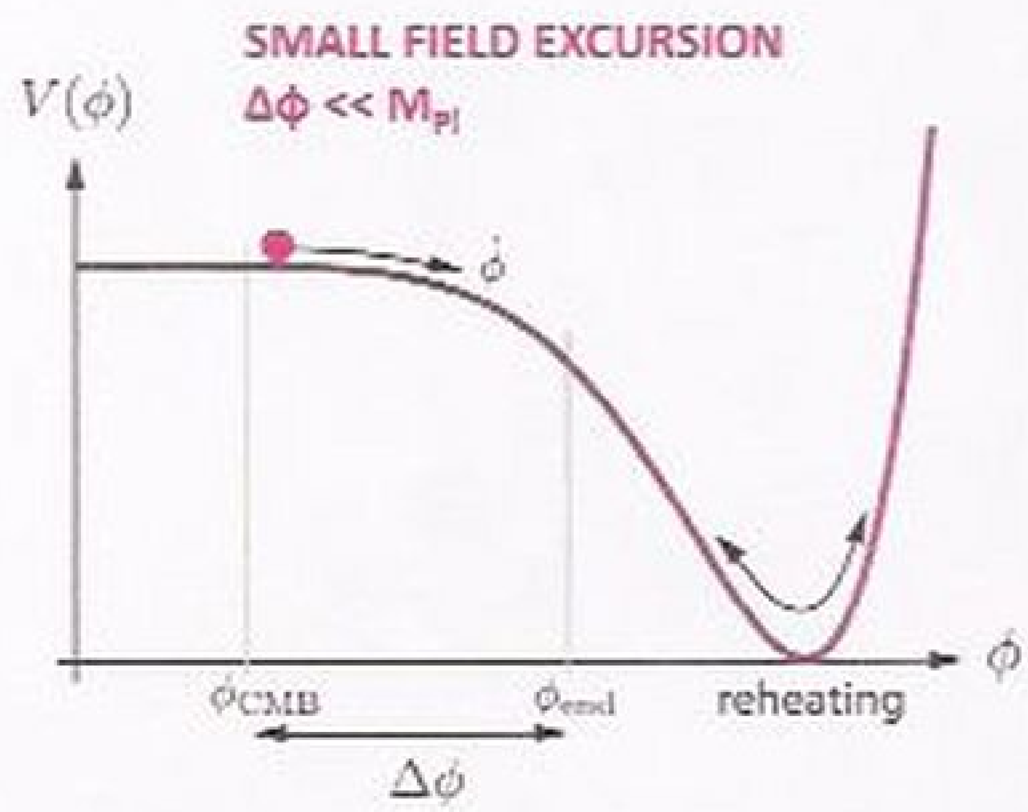


``Small field'' like potential

$$V(\phi) = V_0\left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p\right] \qquad \phi < \mu < M_{\rm Pl}$$

$$\epsilon \sim p^2 \frac{\phi^{2p}}{\mu^{2p}}\frac{M_{\rm Pl}^2}{\phi^2}\left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p\right]^{-1}$$

$\epsilon \to 0$ for $\phi \to 0$



Escursione del campo:

$$\Delta\phi = \int_{\phi_{\text{CMB}}}^{\phi_{end}} d\phi = \int_{t_{\text{CMB}}}^{t_{end}} \dot{\phi} dt \simeq \frac{\dot{\phi}}{H} \int_{Ht_{\text{CMB}}}^{Ht_{end}} d(Ht) = \frac{\dot{\phi}}{H} N_{\text{CMB}} \sim \epsilon^{1/2} N_{\text{CMB}} M_{\text{Pl}}$$

Quindi nel caso di $\varepsilon \sim 1/N_{CMB}$ (come di solito succede nei modelli a grande campo)
e non troppo piccoli, la escursione del campo e` $\Delta\phi > M_{PL}$ → modelli a campo grande.
(qui N_{CMB} definisce la ``finestra osservabile" durante l'inflazione, quella che noi possiamo sondare osservativamente, ovvero N_{CMB} corrisponde ai 60-70 e-folds (contati a partire dalla fine dell' inflazione) in corrispondenza dei quali la scala osservabile piu` grande, ovvero l'orizzonte cosmologico oggi, esce dall'orizzonte durante l'inflazione;
-- ripensate sempre al grafico dell'orizzonte cosmologico in fuzione del tempo--.
Le scali cosmologiche piu` grandi possono essere sondate attraverso la CMB, da cui il pedice "CMB").

Invece nel caso in cui $\varepsilon \ll 1$ allora si avra` $\Delta\phi < M_{PL}$ → modelli a campo piccolo.