

(1)

Argomento generale per vedere che ci aspettiamo fluttuazioni quantistiche dell'inflazione e come queste evolvono su grandi scale (ovvero scale più grandi del raggio di Hubble):

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} = -V''(\varphi)\delta\varphi$$

$$\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 = -V'(\varphi_0)$$

avendo usato $\varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{x}, t)$

Derivo le relazioni rispetto al tempo:

$$(\dot{\varphi}_0)'' + 3H(\dot{\varphi}_0)' = -V''\dot{\varphi}_0 \quad (H = \text{const})$$

$$\ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} = -V''\delta\varphi$$

$$\swarrow a^2$$

trascurabile nel limite $\frac{k^2}{a^2} \ll 1$

$\Rightarrow \dot{\varphi}_0$ e $\delta\varphi$ obbediscono alla stessa equazione

Quindi le wronskiane $W(x, y) = \dot{x}y - \dot{y}x$

Se $W \neq 0$ sono indipendenti;

$$W(\dot{\varphi}, \delta\varphi) = \dot{\varphi}\delta\varphi - \dot{\delta\varphi}\varphi$$

$\dot{W} = -3H W \Rightarrow W \propto e^{-3Ht} \rightarrow 0$. Quindi dopo un po' le 2 soluzioni saranno legate da una costante di proporzionalità

$$\delta\varphi(\vec{x}, t) \sim -\delta t(\vec{x}) \dot{\varphi}_0(t)$$

↑
dipende da $\vec{x}$ perché ho buttato via il gradiente

$$\Rightarrow \varphi(\vec{x}, t) = \varphi_0(t - \delta t(\vec{x}))$$

quindi il campo scalare a seconda del posto acquisisce

lo stesso valore a tempi diversi (o a un certo t non ha lo stesso valore ovunque). È il risultato delle fluttuazioni

quantistiche.

Possiamo quindi dire anche che: su grandi scale, il campo scalare, regione per regione nell'universo passa attraverso la stessa expansion history, ma ad istanti leggermente diversi, a causa delle sue fluttuazioni quantistiche.

2. PERTURBAZIONI COSMOLOGICHE dall'INFLAZIONE

(1)

da fluttuazioni quantistiche del campo $\phi(\vec{x}, t)$

Abbiamo visto 2 equazioni:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} = -V'(\phi) \quad (1)$$

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 = -V'(\phi_0) \quad (2)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\vec{x}, t) \Rightarrow$$

Inserendo nelle (1):

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \frac{\nabla^2 \delta\phi}{a^2} = -V''\delta\phi \quad (\text{per piccole perturbazioni})$$

$\delta\phi$ è la fluttuazione quantistica.

N.B.: si assume un lento rotolamento $V'' \ll H^2$ (o se il campo ha massa $= 0$)

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \frac{\nabla^2 \delta\phi}{a^2} = 0$$

Risolverò l'equazione andando in Fourier space (NB: trasformata 3-dim x è ho 3 termini che dipendono dal tempo):

$$\delta\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{\delta\phi}(\vec{k}, t)$$

onde piane anche in spazio-piatto.

$$\tilde{\delta\phi}(\vec{k}, t) = \tilde{\delta\phi}(-\vec{k}, t)$$

L'equazione diventa:

$$\ddot{\delta\phi}_{\vec{k}} + 3H\dot{\delta\phi}_{\vec{k}} + \frac{k^2}{a^2} \delta\phi_{\vec{k}} = 0$$

Prima dei dettagli andamento qualitativo *:

(2)

$$1) \lambda \ll H^{-1} \rightarrow k \gg aH$$

raggio di Hubble

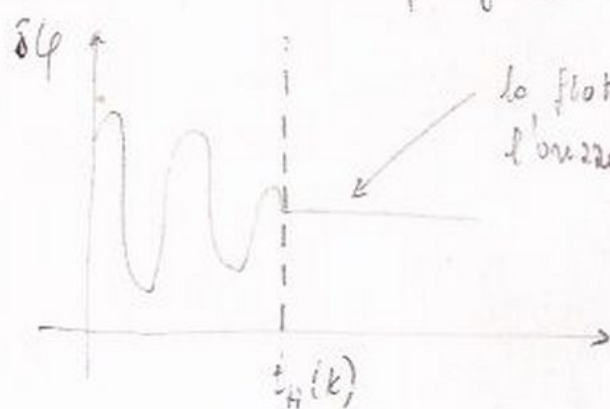
$$\Rightarrow \ddot{\delta\varphi} + \frac{k^2}{a^2} \delta\varphi = 0$$

$\delta\varphi$ oscilla (e lo si doveva aspettare: è come oscillare e ridursi ad uno spazio piatto su scale molto piccole)

$$2) \lambda \gg H^{-1} \rightarrow k \ll aH$$

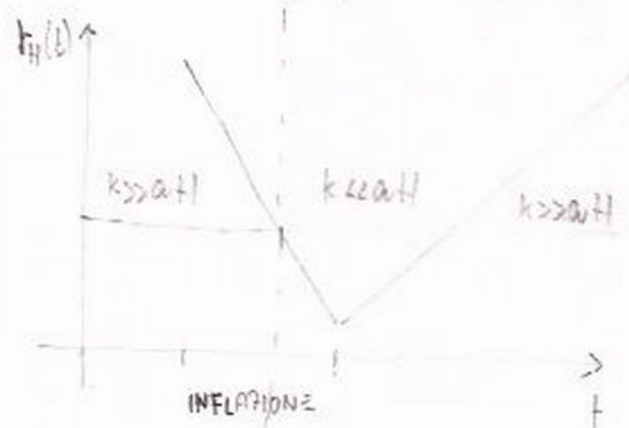
$$\Rightarrow \ddot{\delta\varphi} + 3H\dot{\delta\varphi} = 0$$

$\delta\varphi \approx \text{const.}$ su scale più grandi dell'orizzonte.



la fluttuazione è congelata sopra l'orizzonte (la fluttuazione non si propaga più e la sua ampiezza è congelata a causa di $3H\dot{\delta\varphi}$).

La sua λ_{phys} da $2e^{Ht}$. Se medio su tempi grandi $\delta\varphi \neq 0$: il risultato finale è uno stato con un numero netto di particelle. In pratica è un meccanismo di amplificazione gravitazionale il cui punto cruciale è il fatto che $H = \text{const}$ e i modi prima dentro l'orizzonte sono "stirati" fuori da esso.



Se l'equazione fosse classica avrei due costanti di integrazione; stiamo però parlando di fluttuazioni quantistiche $\rightarrow$ diventano operatori di creazione e distruzione (seconda quantizzazione).

Consideriamo $\hat{\phi} = \omega \delta\phi$ funzione classica del tempo

$$\hat{\phi}(\tau, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[u_k(\tau) a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + u_k^*(\tau) a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right]$$

dove $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^\dagger$ sono operatori di creazione e distruzione.

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0$$

$$\langle 0 | a_{\vec{k}}^\dagger = 0 ;$$

obbediscono alle regole di commutazione: $[a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}] = -i \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$,

e u_k sono normalizzati secondo: $u_k^* u_k' - u_k u_k'^* = -i \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$, $\eta \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$

Nello spazio piatto avrei $u_k(t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega_k}}$

(a piccole distanze, per il principio di equivalenza, devo poter riprodurre la metrica piatta che in meccanica quantistica mi porta a delle onde piane)

$\rightarrow$ Corrisponde alla scelta di un vuoto di Bunch-Davies

Nello spazio curvo le $u_k(\tau)$ obbediscono alla:

$$u_k''(\tau) + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + V a^2 \right) u_k = 0$$

dove $\eta \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$, con τ tempo conforme $\left(d\tau = \frac{dt}{a} \right)$

1) caso $m=0$, e spensione di de Sitter ($a \propto e^{Ht}$, $H = \text{const.}$) (4)

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u_k = 0$$

$$\rightarrow d\tau = \frac{dt}{a} = dt e^{-Ht} \rightarrow \tau = -\frac{1}{H} e^{-Ht} = -\frac{1}{aH} \quad (\tau < 0, \text{ scegliendo opportunamente le costanti di integrazione})$$

$$\frac{a''}{a} (\text{de Sitter}) = \frac{2}{\tau^2} = 2 a^2 H^2 \propto (aH)^{-1} \text{ raggio di Hubble}$$

quindi per scale sotto l'orizzonte $k^2 \gg \frac{a''}{a}$ e

$$u_k'' + k^2 u_k = 0 \rightarrow u_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (k \gg aH)$$

Per scale sopra l'orizzonte:

$$u_k'' - \frac{a''}{a} u_k = 0 \rightarrow (\text{modo crescente}) u_k = B(k) a(\tau) \quad (k \ll aH)$$

con $B(k)$ costante di integrazione.

Faccio una approssimazione per trovare $|B(k)|$: un "matching" tra i 2 regimi quando la scala k attraversa l'orizzonte a $k = aH$
($-k\tau = 1$)

$$|B(k)| a = \frac{1}{\sqrt{2k}} \Rightarrow |B(k)| = \frac{1}{a\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$$

Ritorno alle variabili $\delta\varphi$:

$$\boxed{|\delta\varphi_k| \approx |B(k)| \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}}} \quad \text{per i modi sopra l'orizzonte} \\ (k \ll aH)$$

N.B.: Se sono in quasi de-Sitter

4bis

$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \neq 0$ e allora la scala attraversa l'orizzonte quando

$$k = a_H H_k$$

$$t_k = t(t_H(k))$$

istante al quale la scala k attraversa l'orizzonte durante l'inflazione $\Rightarrow$

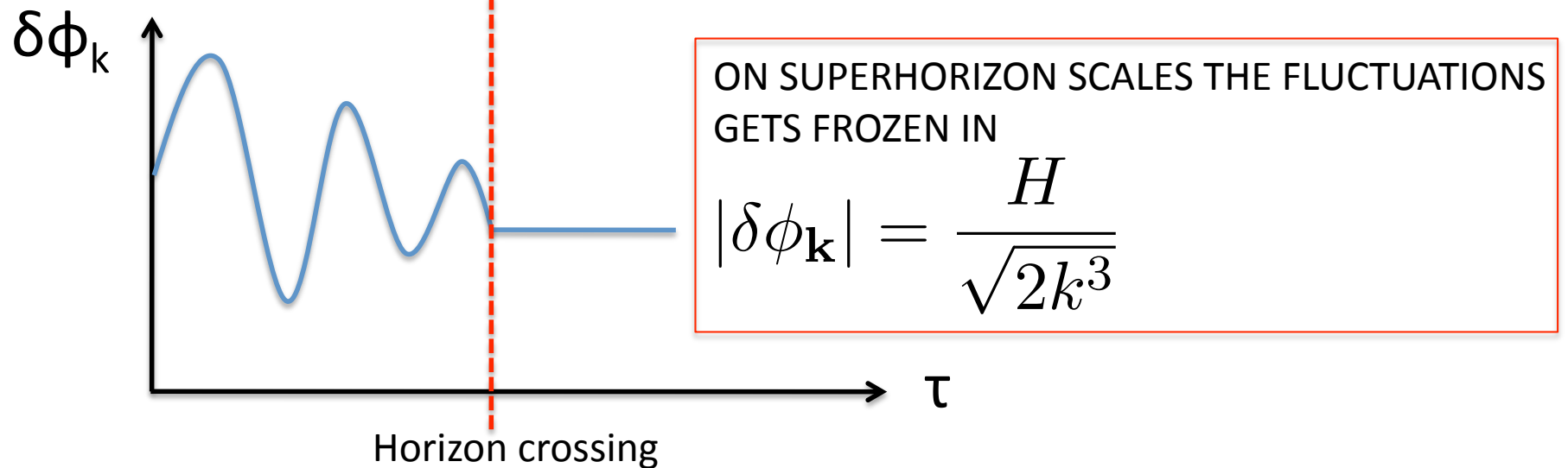
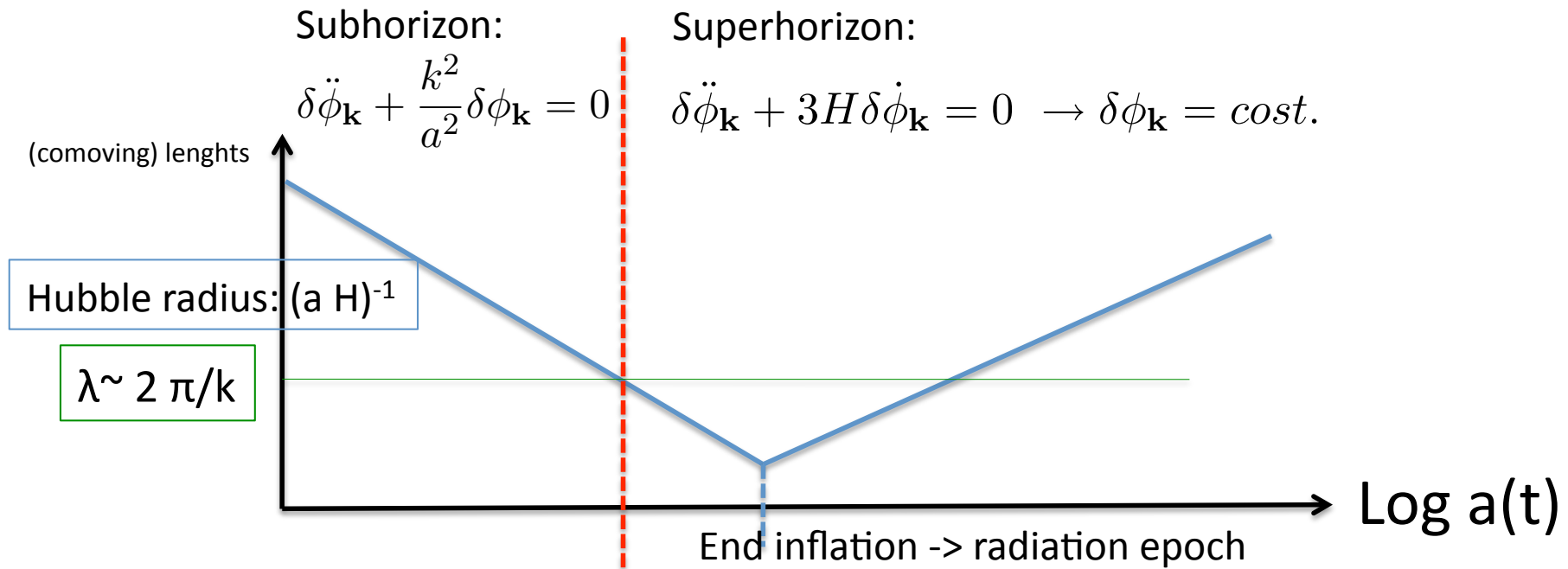
$$\text{otteniamo } |\delta\varphi_k| \approx \frac{H(t_H(k))}{\sqrt{2k^3}}$$

N.B.: soluzione esatta:

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right)$$

$$k\tau \gg 1: u_k(\tau) \sim \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}$$

$$|k\tau| \ll 1: |u_k(\tau)| \sim \frac{1}{\sqrt{2k^3}} H(a(\tau)) \rightarrow |\delta\varphi_k| \sim \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$$



So what's going on?

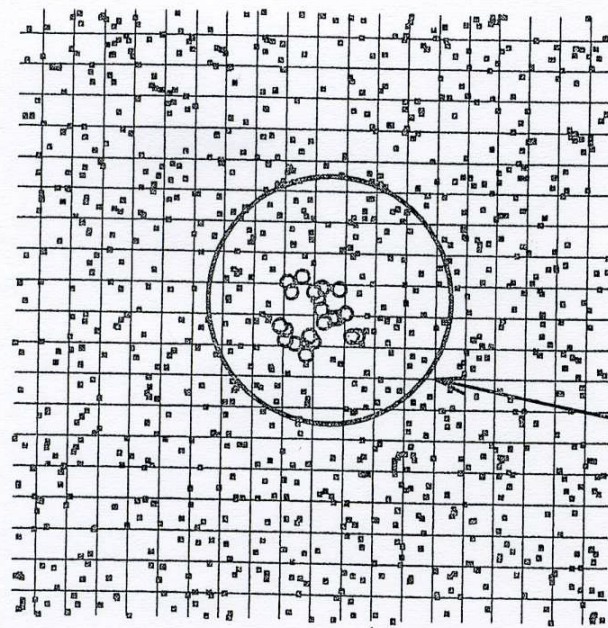
On microscopic scales (well inside the horizon) microphysics is at work: use quantum field theory. There are quantum fluctuations of the scalar field; if averaged over macroscopic interval of time they vanish (quantum fluctuations of vacuum: particles are continuously created and destroyed).

However the space-time background is exponentially inflating so their physical wavelengths grow exponentially

$$\lambda_{phys} \propto a(t) \propto e^{Ht}$$

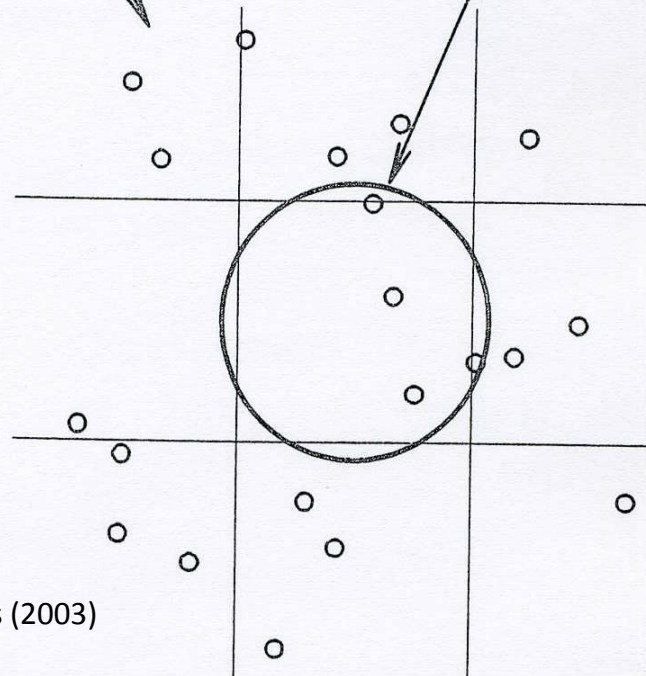
until they become greater than the horizon H^{-1} (which remains almost constant). On super-horizon scales the fluctuations get frozen (because of the friction term $3H\dot{\phi}$). The fluctuations do not vanish if averaged on macroscopic time interval: a classical fluctuation has been generated.

Said in other words: if on superhorizon scales $\delta\phi \neq 0$ over macroscopic time interval then the final result is a state with a net number of particles. This is a gravitational mechanism of amplification. The crucial point is the "in" and "out" (of the horizon) state of the fluctuations



Hubble Volume

Inflation



(5)

Vediamo come ottenere una soluzione valida ad ogni τ , che riproduce i due regimi estremi, $k \ll aH$ e $k \gg aH$, considerati finora.

Campo scalare con massa trascurabile in quasi-de Sitter:

$$\dot{H} = -\epsilon H^2, \quad \epsilon \ll 1$$

In questo caso i) $a(\tau) \simeq -\frac{1}{H\tau(1-\epsilon)}$

ii) $\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1-\epsilon) \rightarrow \frac{a''}{a} \simeq \frac{2}{\tau^2} \left(1 + \frac{3\epsilon}{2}\right)$

i) e ii) ottenuti facendo uno sviluppo all'orologio più basso in ϵ

l'equazione per le u_k diventa:

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u_k = 0 \rightarrow u_k'' + \left(k^2 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2}\right) u_k = 0$$

$$\nu^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon$$

N.B.: posso trattare ϵ come costante perché indipendente

all'orologio più basso in ϵ mi ha che $\dot{\epsilon} \sim O(\epsilon^2)$.

Ho così una eq. di Bessel la cui soluzione è:

$$u_k(\tau) = \sqrt{-\tau} \left[c_1(k) H_{\nu}^{(1)}(-k\tau) + c_2(k) H_{\nu}^{(2)}(-k\tau) \right]$$

Già come $H_{\nu}^{(1)}(x \gg 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{4})}$ ($H_{\nu}^{(2)} = H_{\nu}^{(1)*}$)

$\Rightarrow c_2(k) = 0, c_1(k) = \sqrt{\pi}/2 e^{i(\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}$ per avere l'normalizzato

(6)

oscillatorio su fronte d'onda $\propto e^{-ikr}$

$$\Rightarrow M_k(\tau) = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}}}_{c(k)} \sqrt{-\tau} H_{\nu}^{(1)}(-k\tau) \begin{cases} H_{\nu}^{(1)}(x) \sim \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}, & x \gg 1 \\ H_{\nu}^{(1)}(x) \sim x^{-\nu}, & x \ll 1 \end{cases}$$

Per i modi fuori dall'orizzonte:

$$H_{\nu}^{(1)}(x \ll 1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{2}} 2^{\nu - \frac{3}{2}} \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \right) x^{-\nu} \Rightarrow$$

$$M_k(\tau) \simeq e^{i(\nu - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} 2^{(\nu - \frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (-k\tau)^{\frac{1}{2} - \nu} \times \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$k\tau \ll 1$

$$e |\delta\varphi_k| \simeq 2^{(\nu - \frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{a+1} \right)^{\frac{3}{2} - \nu} \quad (k \ll a+1)$$

Già come $\epsilon \ll 1$ e $\nu^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon$ posso sviluppare in $\epsilon \Rightarrow$

$$|\delta\varphi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{a+1} \right)^{\frac{3}{2} - \nu}, \quad \frac{3}{2} - \nu = -\epsilon \quad \left(\begin{array}{l} \frac{3}{2} - \nu = \eta - \epsilon \\ \text{si include la} \\ \text{massa} \end{array} \right)$$

N.B.: Posso scrivere $H \simeq \frac{H}{k} \left[1 + \frac{H}{H^2} \ln \left(\frac{aH}{k} \right) \right] \simeq \frac{H}{k} \left(\frac{k}{a+1} \right)^{\epsilon}$

$k = aH$

$$\Rightarrow |\delta\varphi_k| \simeq \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \quad (\text{risultato che avevamo anticipato})$$

Commento: Se volete tenere conto di una massa del campo scalare, piccole, ma non nulla

$$m^2 = V'' \ll H^2$$

$$u''_k + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + m^2 a^2 \right) u_k = 0 \rightarrow \text{ho ancora l'equazione di Bessel con adesso}$$

$$\nu^2 = \frac{9}{4} + 3\varepsilon - 3\eta$$

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{m^2}{H^2}$$

e riprendo tutte le espressioni precedenti con questa nuova

espressione di $\nu \approx \frac{3}{2} + \varepsilon - \eta$ (all'ordine più basso in ε e η).

$$\sigma \frac{3}{2} - \nu = \eta - \varepsilon$$

Una perturbazione di $\delta\varphi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu}$, una perturbazione nel tensore energia momento e a sua volta, attraverso le eq. di Einstein $\delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta(Rg_{\mu\nu})$ e quindi $\delta g_{\mu\nu}$.

A sua volta $\delta g_{\mu\nu}$ entrerà nella eq. di Klein-Gordon come perturbazione della metrica.

Quindi $\delta\varphi \Leftrightarrow \delta g_{\mu\nu}$, le fluttuazioni di φ sono strettamente legate a $\delta g_{\mu\nu}$ (anche per questioni di gauge-invarianza).

Infatti in termini delle quantità gauge-invariante

$$Q_\varphi = \delta\varphi + \frac{\dot{\varphi}}{H} \psi \quad (\text{variante di Sasaki-Mukhamov})$$

si ottengono delle eq. del tipo:

$$\hat{Q}_\varphi'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} + M^2 a^2\right) \hat{Q}_\varphi = 0$$

con $M^2 = 3\eta - 6\epsilon$ e risolvibile come al solito come

una eq. di Bessel con $\nu \approx \frac{3}{2} + (3\epsilon - \eta) \left(\nu^2 = \frac{9}{4} + 9\epsilon - 3\eta\right)$

si può riutilizzare le soluzioni viste prima.

Già come $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \delta\varphi H$ uno poi arriva allo spettro

$$\Delta(k) = \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu}$$

N.B.: a lezione ho usato una notazione diversa per Ψ . A lezione, anticipando qui alcuni concetti/definizioni che poi si vedono in dettaglio nella parte di perturbazioni cosmologiche in Relatività Generale, al posto di Ψ ho usato la quantità

$$\hat{\Phi}$$

e quindi ad un indice spettrale per le perturbazioni scalari:

$$n-1 = \frac{d \ln \Delta}{d \ln k} = 3-2\nu = 2\eta - 6\epsilon$$

(ci vedremo anche note più avanti) -

Primordial gravitational waves

GWs are tensor perturbations of the metric. Restricting ourselves to a flat FRW background (and disregarding scalar and vector modes)

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}(\underline{x}, \tau)) dx^i dx^j]$$

where h_{ij} are tensor modes which have the following properties

$$h_{ij} = h_{ji} \quad (\text{symmetric})$$

$$h^i_i = 0 \quad (\text{traceless})$$

$$h^i_{j|i} = 0 \quad (\text{transverse})$$

and satisfy the equation of motion

$$h''_{ij} + 2\frac{a'}{a}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 0$$

$$' = d/d\tau$$

Primordial gravitational waves

GWs have only $(9 \rightarrow 6 - 1 - 3 =) 2$ independent degrees of freedom, corresponding to the 2 polarization states of the graviton

$$h_{ij}(\vec{x}, \tau) = \int \sum_{\lambda=+, \times} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} h_{\lambda}(\vec{x}, \tau) \epsilon_{ij}^{\lambda}(\vec{k})$$

polarization tensor

$$h'' + 2 \frac{a'}{a} h' + k^2 h = 0$$

free massless, minimally coupled scalar field

behaviour:

$k \ll aH$ (outside the horizon) $h \approx \text{const} + \text{decaying mode}$

$k \gg aH$ (inside the horizon) $h \approx e^{\pm i k \tau} / a$ gravitational wave; it freely streams, experiencing redshift and dilution, like a free photon)

$$h = \frac{H}{\pi M_{\text{Pl}}}$$

$\sqrt{H} \propto V(\phi)^{1/4} \equiv E_{\text{inf}}$
Energy scale of inflation!

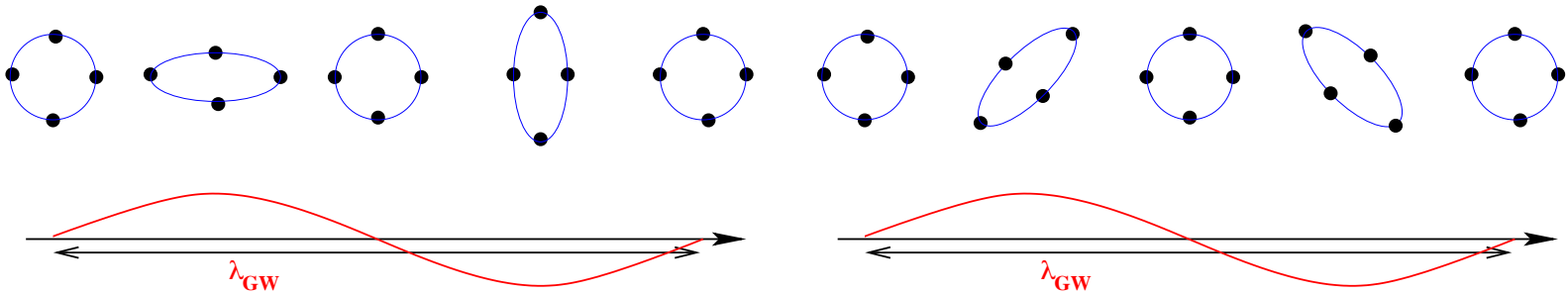


Fig. 1. We show how point particles along a ring move as a result of the interaction with a GW propagating in the direction perpendicular to the plane of the ring. The left panel refers to a wave with $+$ polarization, the right panel with $\times$ polarization.

From arXiv:0709.4682

(15)

Abbiamo visto che se abbiamo un campo scalare senza massa o molto leggero, le sue fluttuazioni vengono "eccitate" in de-Sitter su scale più grandi del raggio di Hubble. Una cosa analoga può succedere in altri campi senza massa o molto leggeri.

Un esempio importante sono le onde gravitazionali

$$g_{ij} = a^2 (S_{ij} + h_{ij})$$

con $h^i_i = 0$, $h^i_{j;i} = 0$;

$$h_{ij} = h_{ji}$$

Le onde gravitazionali hanno 2 gradi di libertà che si propagano come due campi scalari minimamente accoppiati:

$$\phi_{+,x}$$

con $h_{+,x} = \sqrt{32\pi G} \phi_{+,x}$

$$\Delta_{h_{+,x}}(k) = 32\pi G \Delta_{\phi_{+,x}}(k) = \frac{32\pi}{M_{Pl}^2} \frac{H_*^2}{4\pi^2} = \frac{8}{\pi} \frac{H_*^2}{M_{Pl}^2} = \frac{8}{\pi} \frac{H^2}{M_{Pl}^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\epsilon}$$

$M_{Pl}^2 = G^{-1}$; * indica il tempo al quale la scala k attraversa l'orizzonte durante l'inflazione

N.B.: siccome $\frac{H_*^2}{M_{Pl}^2} \propto f_{inflatome} \approx V(\varphi)$ l'ampiezza delle

onde gravitazionali è $\propto$ alla scala di energia a cui avviene l'inflazione.

L'indice spettrale è $n_T = \frac{d \ln \Delta_h(k)}{d \ln k} = -2\epsilon$.