

Spettro di potenza

Come quantificare l'ampiezza delle fluttuazioni, cioè quanto grande è una fluttuazione a una certa scala k ?

So che $\langle \delta\phi \rangle = 0$. Allora mi interessa $\langle \delta\phi(\vec{x} + \vec{r}, t) \delta\phi(\vec{x}, t) \rangle$
 $\uparrow$
funzione di correlazione

In Fourier-space:

$$\text{dato un campo generico } \delta(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \delta\vec{k}(t)$$

Lo spettro di potenza è definito come

$$\langle \delta\vec{k}_1 \delta\vec{k}_2 \rangle = (2\pi)^3 P(k) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad \begin{array}{l} \text{invarianza per traslazioni} \\ \text{invarianza x rotazioni} \end{array}$$

Si può far vedere che $P(k)$ è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione.

Inoltre se calcolo la varianza $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$ trovo che

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) = \int_0^\infty \Delta(k) \frac{dk}{k}$$

$$\Delta(k) = \frac{1}{2\pi^2} P(k) k^3$$

In ambito inflazionistico si è soliti usare $\Delta(k)$

In generale si definisce come indice spettrale dello spettro di potenza delle perturbazioni scalari la quantità:

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \Delta(k)}{d \ln k}$$

Descrive come le perturbazioni dipendono dalle scale cosmologiche (descrive la forma dello spettro).

Per esempio, se n_s si può considerare costante, allora gli spettri di potenza hanno una legge di potenza:

$$\Delta(k) = \Delta(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1}$$

con k_0 una certa scala di riferimento.

Nel caso di un campo scalare, usando gli operatori di creazione e distruzione

$$\langle 0 | \delta\varphi_{\vec{k}_1} \delta\varphi_{\vec{k}_2}^* | 0 \rangle \rightarrow \langle 0 | a a | 0 \rangle = \langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle = \langle 0 | a^\dagger a^\dagger | 0 \rangle = 0$$

l'unico non nullo è $\langle 0 | a a^\dagger | 0 \rangle \Rightarrow$

$$\langle \delta\varphi_{\vec{k}_1} \delta\varphi_{\vec{k}_2}^* \rangle = (2\pi)^3 |\delta\varphi_k|^2 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \Rightarrow$$

$$P(k) = |\delta\varphi_k|^2 \quad \Delta(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\varphi_k|^2 \quad \text{dove } \delta\varphi_k = \frac{\mu_k}{a}$$

Per quasi-de Sitter e campo scalare leggero (con massa piccola), e tenendo conto anche delle perturbazioni della metrica — quindi nel caso più generale che abbiamo visto

$$|\delta\varphi_k| = \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{3}{2}-\nu} \quad \frac{3}{2}-\nu \approx \eta-3\epsilon$$

su scale più grandi dell'orizzonte troviamo:

$$\Delta(k) = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu} \quad 3-2\nu = 2\eta-6\epsilon$$

Per le onde gravitazionali (modi tensoriali) il calcolo è del tutto analogo (si veda quanto già anticipato nelle note sulle onde gravitazionali).