

Generating the primordial density perturbations

The inflaton field is special: it dominates the energy density of the universe during inflation

$$\delta\phi \rightarrow \delta\rho \simeq V'(\phi)\delta\phi \simeq -3H\dot{\phi}\delta\phi$$

Fluctuations in the inflaton produce fluctuations in the universe expansion from place to place, so that each region in the universe goes through the same expansion history but at slightly different times:

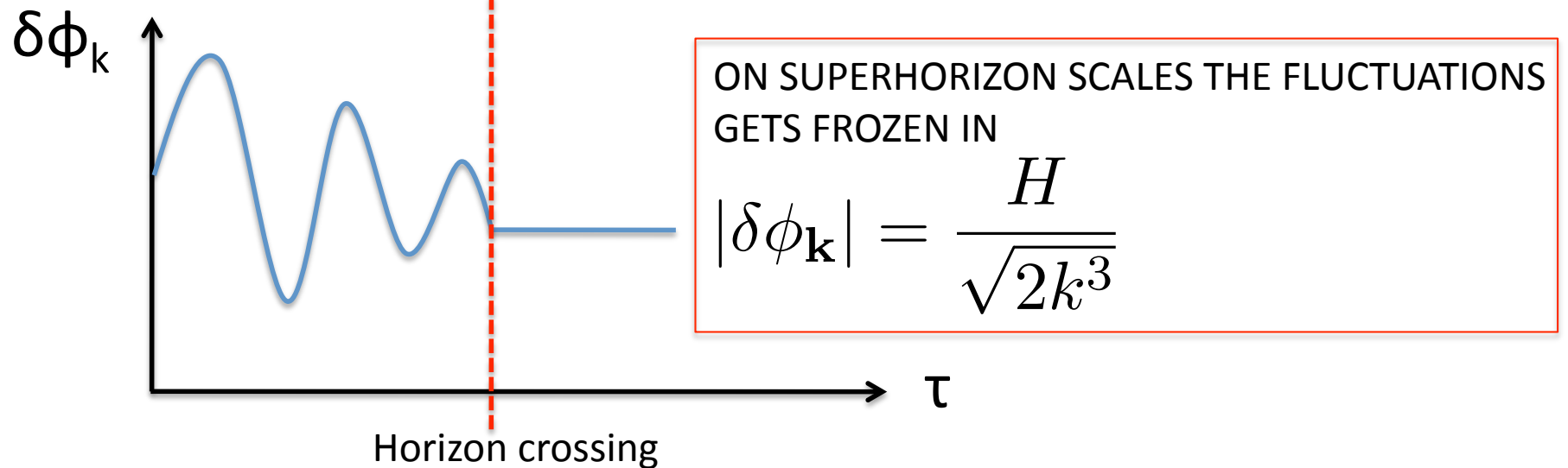
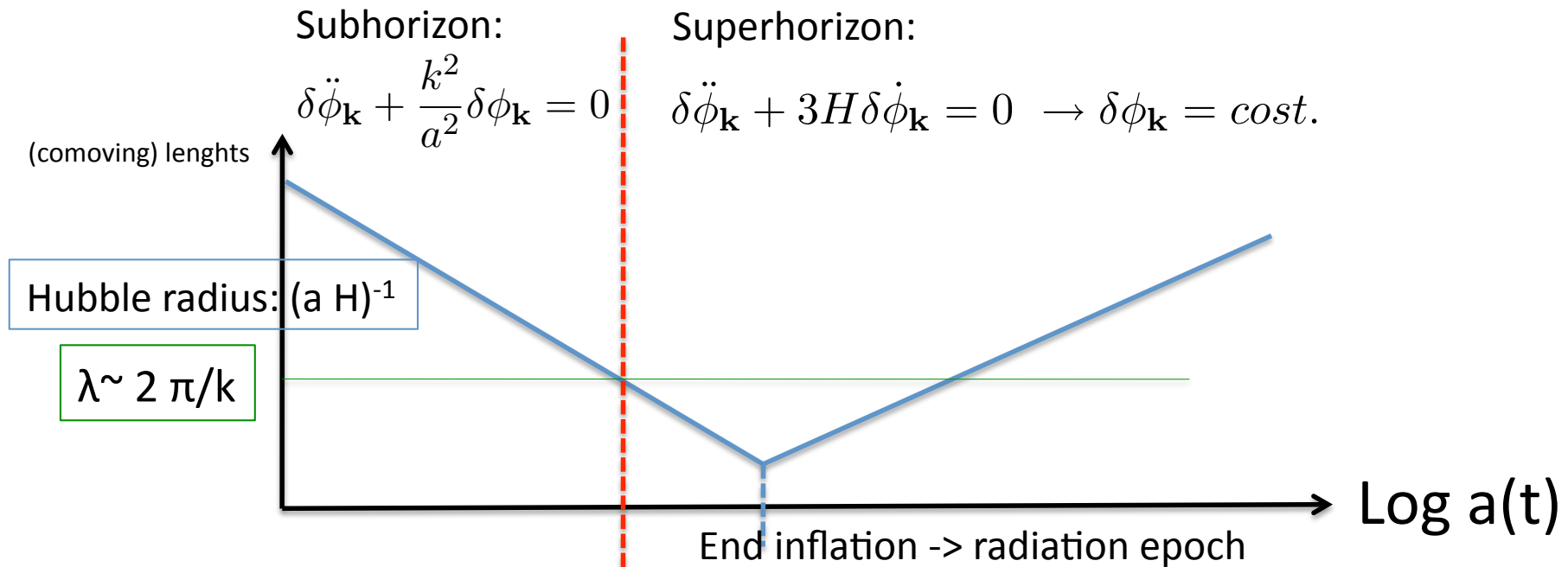
$$\delta t = -\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} ; \text{ now remember that number of e-foldings } N = \ln(a_f/a_i) = \int_{t_i}^{t_f} H dt$$

$\rightarrow$ additional expansion $\zeta = \delta N = H\delta t$

$$\zeta = H\delta t = -H\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \simeq -H\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}$$

ζ remains constant on superhorizon scales (ζ is the uniform energy density curvature pert.)

N.B.: to obtain the last expression for ζ just use $\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + p_\phi) = -3H\dot{\phi}^2$



Come passare dalle fluttuazioni del campo scalare alle fluttuazioni $\frac{\delta \rho}{\rho}$?

$$\rho_\varphi \sim V(\varphi) \rightarrow \delta \rho_\varphi \approx V' \delta \varphi \approx -3H \dot{\varphi} \delta \varphi \quad (3H \dot{\varphi} \approx -V')$$

Posso scrivere $\frac{\delta \rho_\varphi}{\rho_\varphi} \sim \frac{-H \delta \varphi}{\dot{\varphi}}$? non proprio.

Dovrei scrivere $\frac{\delta \rho_\varphi}{\rho_\varphi + \dot{\rho}_\varphi}$ per avere $\frac{H \delta \varphi}{\dot{\varphi}}$ -

In effetti la questione involve qualche tecnicismo (quando consideriamo scale più grandi dell'orizzonte ci sono questioni di gauge)

in particolare $\frac{\delta \rho}{\rho}$ non è una quant. invariante gauge -

$$\text{ma lo è la quantità } \mathcal{J} = -\gamma - \frac{H \delta \rho}{\dot{\rho}} = -\gamma + \frac{\delta \rho}{3(\rho + \dot{\rho})}$$

$$\text{Per il campo scalare } \varphi: \mathcal{J} = -\gamma - \frac{H \delta \rho_\varphi}{\dot{\rho}_\varphi} = + \frac{\delta \rho_\varphi}{3(\rho_\varphi + \dot{\rho}_\varphi)} = \frac{-3H \dot{\varphi} \delta \varphi}{3 \dot{\varphi}^2} = \frac{-H \delta \varphi}{\dot{\varphi}} \quad (*)$$

D'altra parte fuori dall'orizzonte la microfisica è congelata e ci si aspetta una evoluzione semplice; in effetti si ha che

$$\mathcal{J} = \text{const.} \quad (\text{per } k \ll aH) \Rightarrow$$

per calcolare $\mathcal{J}$ quando la fluttuazione rientra nell'orizzonte a $t_H^{(2)}(k)$, basta calcolare quando esce dall'orizzonte durante l'inflazione a $t_H^{(1)}(k)$:

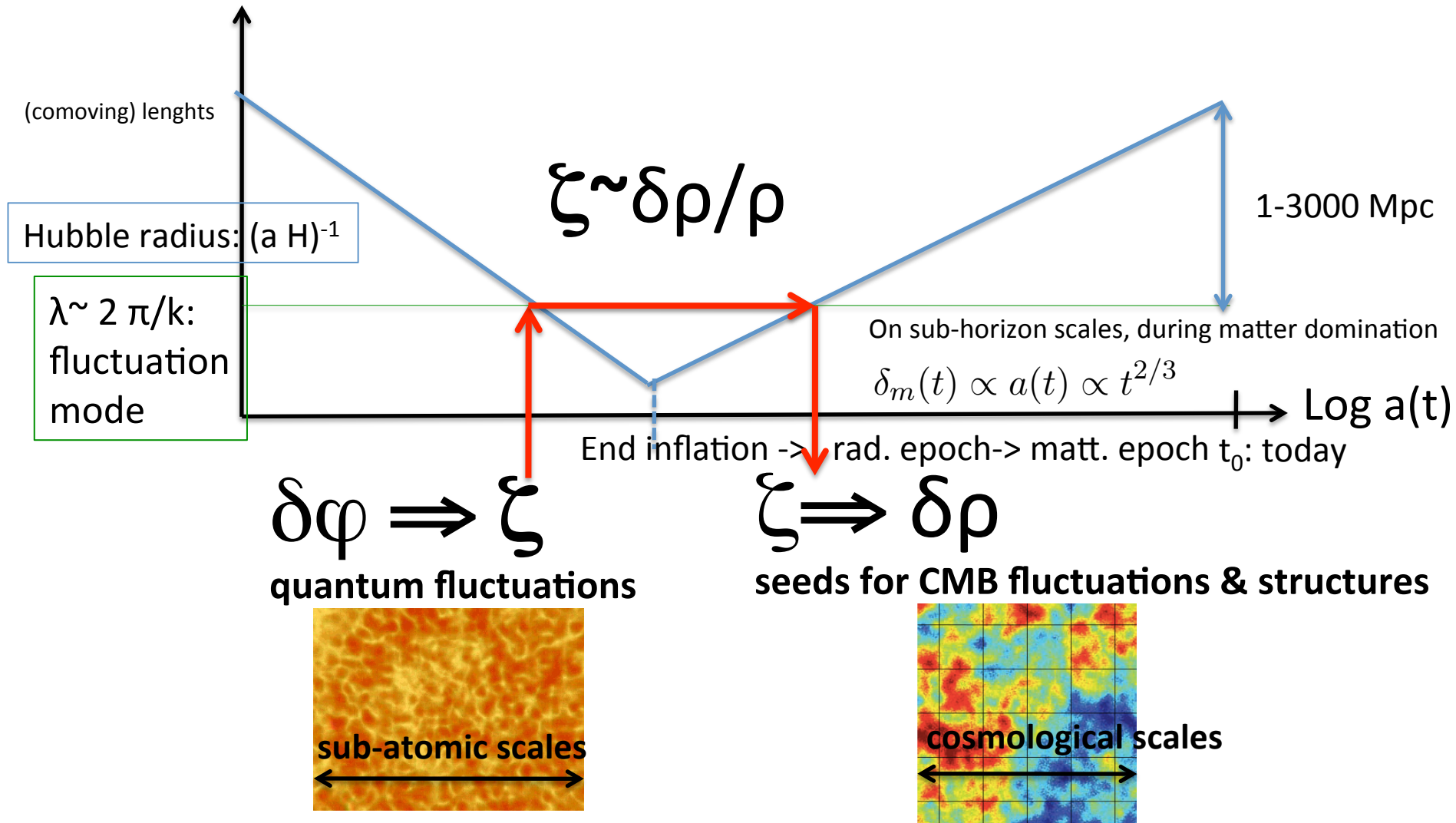
(*) Nota: nello scrivere $\mathcal{I}$ per il campo scalare φ ho posto $\varphi = 0$; questo corrisponde ad una particolare scelta di gauge (uniform curvature gauge); lo ri fa per semplificare i conti, del momento che comunque $\mathcal{I}$ è una quantità gauge-invariante.

N.B.: a lezione ho usato una notazione diversa per Ψ . A lezione, anticipando qui alcuni concetti/definizioni che poi si vedono in dettaglio nella parte di perturbazioni cosmologiche in Relatività Generale, al posto di Ψ ho usato la quantità



Structure formation within the inflationary scenario

Quantum fluctuations are stretched from microscopic to cosmological scales



Se la fluttuazione rientrerà durante la radiation epoch (a $t_H^{(2)}(k)$):

$$\left. \frac{1}{4} \frac{\delta \rho}{\rho} \right|_{t_H^{(2)}(k)} = \left. \delta \varphi \right|_{t_H^{(1)}(k)} = \left. \frac{H \delta \varphi}{\dot{\varphi}} \right|_{t_H^{(1)}(k)}$$

ci sarà quindi una relazione dello spettro delle perturbazioni $\delta \rho$,
cioè la dipendenza di $\delta \rho$ da k , e in particolare modello

inflazionario, visto che $H = H(\varphi)$ e ho $\dot{\varphi} \approx -\frac{V'}{3+1}$

Se calcolo $\Delta(k)$ relativo a $\delta \rho$:

$$\Delta_k(\delta \rho) \approx \frac{H^2}{\dot{\varphi}^2} \Delta_k(\delta \varphi) = \left(\frac{H^2}{2\pi \dot{\varphi}} \right)^2 \bigg|_{t_H^{(1)}(k)} = \left(\frac{H^2}{2\pi \dot{\varphi}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu}$$

$3-2\nu = 2\eta - 6\epsilon$

Se H e $\dot{\varphi}$ variano molto poco questo vuol dire che ci si aspetta che lo

lo spettro di potenza abbia una debole dipendenza dalla scala k , ovvero uno spettro almost nearly scale-invariant, ovvero vicino ad essere uno spettro di Harrison-Zel'dovich, MA non esattamente di Harrison-Zel'dovich

ex: se ho universo di de-Sitter: $a \propto e^{Ht}$

$$t_H(k) \text{ t.c. } k = aH = He^{Ht} \rightarrow t_H^{(k)} = H^{-1} \ln\left(\frac{k}{H}\right)$$

se $\dot{\varphi}$ dipende poco da t , e $t_H^{(k)}$ poco da k $\dot{\varphi}(t_H(k)) \approx \text{const}$,

indipendentemente da $k \Rightarrow \delta \rho$ al rientro dell'orizzonte dipenderà molto poco da k .

Se si deriva da $\phi(t)$, e se il campo ha una piccola massa
 ci saranno dei parametri ϵ e η piccoli ma $\neq 0 \Rightarrow$ ci si
 può aspettare una deviazione ordine $O(\epsilon, \eta)$ dallo
 spettro di Harrison-Zel'dovich in generale.

Infatti la dipendenza della scala è descritta dall'indice
spettroscopico $n-1 = \frac{d \ln \Delta(k)}{d \ln k}$, se $n = \text{cost} \rightarrow \Delta(k) = A k^{n-1}$

(se $n=1 \rightarrow \Delta(k) = \text{cost}$, spettro di Harrison-Zel'dovich) — 3-2\gamma

Si come posso sapere $\Delta_k \left(\frac{\delta \phi}{\phi} \right) = \left(\frac{H^2}{2\pi \dot{\phi}} \right)^2 \Big|_{t=t(k)} = \left(\frac{H^2}{2\pi \dot{\phi}} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\gamma}$

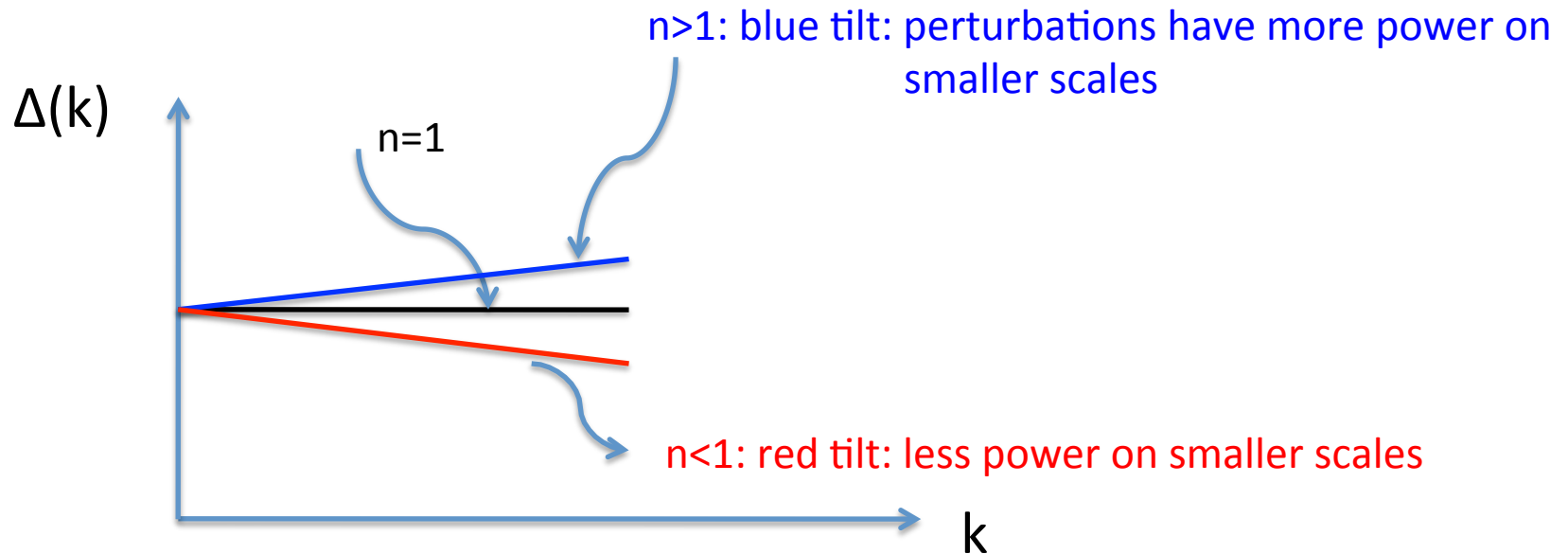
con $3-2\gamma = -6\epsilon + 2\eta$

trovo $\boxed{n-1 = 3-2\gamma = 2\eta - 6\epsilon}$

N.B. : questa espressione tiene conto anche del fatto che
 ci devono anche perturbare la metrica di R.W. oltre
 che il campo scalare — Se vengono generate come visto,
 ma l'inflatone è un campo speciale: determina la
 densità di energia durante l'inflazione —

Varying the Spectral index

If $n=1$: Harrison-Zel'dovich spectrum (exact scale-invariance)



$n - 1 = 2\eta - 6\epsilon$ parametrizes deviation from scale-invariance:

$n=1$ would signal some underlying symmetry;

measuring $n \neq 1$ would signal a dynamical process for generating the initial density fluctuations (inflation??)

Modo alternativo di calcolare l'indice spettrale delle perturbazioni di densità
(non fatto a lezione)

$$J \sim - \frac{H \delta \rho}{\dot{\phi}} \sim - \frac{H \delta \phi}{\dot{\phi}} \Big|_{t_H(k) = t_*}$$

$$N_k = \int_{t_k} H dt = \ln \left(\frac{a_f}{a_k} \right) \approx \ln \left(\frac{H a_f}{k} \right)$$

$$H_k a_k = \text{const } k$$

$$d \ln k \approx \cancel{H dt} + H dt$$

$$\begin{aligned} \text{N.B.: } \mathcal{P}_{\delta\phi} &= \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2 \\ &= \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{H^2}{2k^3} = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_\gamma \sim \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \mathcal{P}_{\delta\phi} \sim \left(\frac{H^2}{\dot{\phi}} \right)^2$$

$$n-1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_\gamma}{d \ln k} = \frac{1}{\mathcal{P}_\gamma} \frac{d \mathcal{P}_\gamma}{H dt} = \frac{2 H^2}{\dot{\phi}} \times \frac{2 H \dot{H} \dot{\phi} - H^2 \ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2} \times \frac{1}{H} \times \frac{\dot{\phi}^2}{H^4}$$

$$= -2 \frac{\ddot{\phi}}{H \dot{\phi}} + 4 \frac{\dot{H}}{H^2}$$

$$= 2\eta - 2\varepsilon - 4\varepsilon = 2\eta - 6\varepsilon$$

$$\text{N.B.: } \frac{\ddot{\phi}}{H \dot{\phi}} \approx \eta - \varepsilon$$

Onde gravitazionali da inflazione: spettro di potenza

Abbiamo visto che se abbiamo un campo scalare senza massa o molto leggero, le sue fluttuazioni vengono "eccitate" in de-Sitter su scale più grandi del raggio di Hubble. Una cosa analoga può succedere per altri campi senza massa o molto leggeri.

Un esempio importante sono le onde gravitazionali

$$g_{ij} = a^2 (S_{ij} + h_{ij})$$

$$\text{con } h^i_i = 0, h^i_{j;i} = 0;$$

$$h_{ij} = h_{ji}$$

Le onde gravitazionali hanno 2 gradi di libertà che si propagano come due campi scalari minimamente accoppiati:

$$\phi_{+,x}$$

$$\text{con } h_{+,x} = \sqrt{32\pi G} \phi_{+,x}$$

$$\Delta_{h_{+,x}}(k) = 32\pi G \Delta_{\phi_{+,x}}(k) = \frac{32\pi}{M_{Pl}^2} \frac{H_*^2}{4\pi^2} = \frac{8}{\pi} \frac{H_*^2}{M_{Pl}^2} = \frac{8}{\pi} \frac{H^2}{M_{Pl}^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^{-2\epsilon}$$

$M_{Pl}^2 = G^{-1}$; * indica il tempo al quale la scala k attraversa l'orizzonte durante l'inflazione

N.B.: siccome $\frac{H_*^2}{M_{Pl}^2} \propto f_{\text{inflatone}} \approx V(\varphi)$ l'ampiezza delle

onde gravitazionali è $\propto$ alla scala di energia a cui avviene l'inflazione.

$$\text{L'indice spettrale è } n_T = \frac{d \ln \Delta_h(k)}{d \ln k} = -2\epsilon.$$

Spettro di potenza delle onde gravitazionali (modi tensoriali):

$$\text{è dato da } \Delta_T = \frac{16 H_*^2}{\pi M_{Pl}^2}$$

dove * indica il tempo a cui una scala k attraversa l'orizzonte durante l'inflazione (ho moltiplicato per 2 il risultato trovato nelle note sulle onde gravitazionali per tenere conto dei 2 stati di polarizzazione).

* Scala di energia dell'inflazione:

per il confronto con le osservazioni (es. dalla CMB) si usa spesso il rapporto

$$r = \frac{\Delta_T}{\Delta_\gamma} \quad (\text{rapporto tra ampiezza delle perturbazioni tensoriali e quelle scalari})$$

tenendo conto che $\Delta_\gamma \sim 10^{-10}$ (dalle anisotropie del CMB in grandi scale angolari) e che $\Delta_T = \frac{16 H_*^2}{\pi M_{Pl}^2}$ con $H_*^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \approx \frac{8\pi V(\phi)}{3 M_{Pl}^2}$ durante l'inflazione si trova:

$$V^{\frac{1}{4}} \approx 10^{16} \text{ GeV} \left(\frac{r}{0.01} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Si noti che una scala dell'ordine di $10^{15} \div 10^{16} \text{ GeV}$ è tipica di alcuni modelli di Grande Unificazione (GUT).

* Relazione di consistenza fra modelli inflazionari (a singolo campo):

Riconduciamo il rapporto $z = \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma}$;

$$\Delta\tau = \frac{16 H_*^2}{\pi M_{Pl}^2}$$

$$\Delta\sigma = \left(\frac{H^2}{2\pi \dot{\varphi}} \right)^2 = \frac{H^2}{4\pi^2} \cdot \frac{H^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{H^2}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi G}{\epsilon},$$

dove all'ultimo passaggio è stato che:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi G \frac{\dot{\varphi}^2}{H^2} \quad (*)$$

e quindi $\Delta\sigma = \frac{H^2}{\pi M_{Pl}^2 \epsilon} \Rightarrow z = \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} = 16\epsilon = -8m_T$

dove m_T è l'indice spettrale delle onde gravitazionali.

I modelli inflazionari a slow-roll di singolo campo predicono pertanto una relazione tra z e m_T che è indipendente dal modello (relazione di consistenza).

Se verificata sperimentalmente sarebbe una prova inequivocabile dei modelli inflazionari, purché non esiste altro meccanismo in grado di produrre questa relazione.

Tuttavia provare sperimentalmente questa relazione
non è affatto semplice

(per misurare l'indice spettrale n_T , cioè la "forma" dello
spetto bisogna prima misurare il segnale, cioè un'amplificazione
delle onde gravitazionali dall'inflazione. Finora
abbiamo solo upper-limits) —

(*) Per arrivare a questa espressione si è basta derivare rispetto a t

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(V(\varphi) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right) \text{ e usare l'eq. del moto per } \varphi: \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi)$$

Predizioni osservative :

4 osservabili : 2 ampiezze, una per lo spettro perturbazioni di densità (perturbazioni scalari in termini della quantità y) e una per lo spettro delle onde gravit.

2 indici spettrali

$$\Delta_y(k) = \Delta_y(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{m_s-1}, \quad \text{con } \Delta_y(k_0) = \frac{H^2}{\pi M_{Pl}^2 \epsilon} \Big|_{k_0} \quad \text{e } m_s-1 = 2\eta - 6\epsilon$$

$$\Delta_T(k) = \Delta_T(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{m_T}, \quad \text{con } \Delta_T(k_0) = \frac{16H^2}{\pi M_{Pl}^2} \Big|_{k_0} \quad \text{e } m_T = -2\epsilon$$

Si noti che sia l'ampiezza che l'indice spettrale dipendono entrambi dalla dinamica del campo scalare durante l'inflazione, e quindi dal potenziale $V(\phi)$ visto che:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi); \quad 3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi) \quad \text{e} \quad \epsilon \sim M_{Pl}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad \eta \sim M_{Pl}^2 \frac{V''}{V}$$

Quindi, ponendo dei constraints osservativi sulle ampiezze e gli indici spettrali si può porre vincoli sui parametri di slow-roll e quindi sul tipo di potenziale che ha guidato l'inflazione (e veda più avanti lezioni su vincoli osservativi dalla CMB) —

Pur avendo 4 osservabili da determinare 1 può essere eliminata
poiché si misura la normalizzazione dello spettro (angolo) delle
anisotropie della CMB (su grandi scale angolari).

Quindi un'ampiezza può essere rimossa e si può usare come
osservabile il rapporto $r = \frac{\Delta T}{\Delta y}$.

Inoltre, si usano la relazione di consistenza, anche n_T
può essere "eliminata" (ovviamente in modo che si assume che
la relazione di consistenza sia soddisfatta).

Rimangono quindi 2 osservabili: r e n_s . È il solito
classificare i vari modelli inflazionari (a singolo campo)
nel piano (r, n_s) e a confrontarli con i limiti
sperimentali su r e n_s .