



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica- Meccatronica

Canale

Compito del 6 giugno 2009

VERDE

Un' asta omogenea di lunghezza $L=0.6m$ e massa $M=1.4 kg$ è vincolata a ruotare senza attrito in un piano verticale attorno ad un suo estremo. Inizialmente è posta in equilibrio (instabile) in verticale sopra il vincolo.

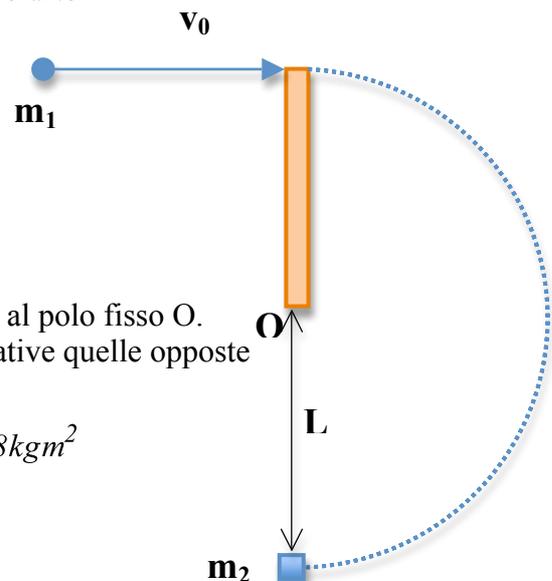
Un proiettile di massa $m_1=30g$ che si muove orizzontalmente con velocità $v_0 = 2.4m/s$ urta l'asta all'estremo libero e rimbalza all'indietro sempre con velocità orizzontale. Se si osserva che il modulo della velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto è $\omega=0.34 rad/s$

1. Calcolare la velocità con cui il proiettile rimbalza

Dopo l'urto l'asta prosegue il suo moto di rotazione attorno al vincolo, e quando si trova nel punto più basso l'estremo dell'asta urta in modo completamente inelastico un'altra massa $m_2=200g$ inizialmente ferma. Calcolare:

2. La velocità angolare dell'asta subito dopo il secondo urto
3. La variazione di energia in quest'urto

v_R (m/s)	-1.23	-0.773	-4.65	-0.121
ω_2 (rad/s)	3.41	24.2	0.91	6.93
ΔE (J)	-2.47	-12.7	-1.1	-46.7



Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto al polo fisso O. Assumendo positive le velocità verso destra e negative quelle opposte si ha:

$$-m_1 v_0 L = -I\omega + m_1 v_R L \quad I = \frac{1}{3} M L^2 = 0.168 \text{ kgm}^2$$

$$v_R = \frac{I\omega}{m_1 L} - v_0 = 0.773 \text{ m/s}$$

Dopo l'urto il moto si svolge sotto l'azione di forze conservative, per cui si conserva l'energia meccanica. Ponendo lo 0 dell'energia potenziale gravitazionale nel polo O si ha:

$$E_i = \frac{1}{2} I \omega^2 + Mg \frac{L}{2} = E_f = \frac{1}{2} I \omega_1^2 - Mg \frac{L}{2} \Rightarrow \omega_1^2 = \omega^2 + 2 \frac{MgL}{I} = 98.12 \text{ rad}^2 / \text{s}^2$$

$$\omega_1 = 9.9 \text{ rad/s}$$

Di nuovo, nell'urto anelastico si conserva il momento angolare rispetto al polo O:

$$I\omega_1 = \omega' (I + m_2 L^2) \Rightarrow \omega' = \frac{I}{I + m_2 L^2} \omega_1 = 6.93 \text{ rad/s}$$

L'energia dissipata nell'urto é:

$$\Delta E = \frac{1}{2} (I + m_2 L^2) \omega'^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 = -4.18 \text{ J}$$

Una massa $M=0.355$ kg di acqua liquida a $t_0=45^\circ\text{C}$ e alla pressione $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa viene portata allo stato di vapore alla temperatura $t_F = 110^\circ\text{C}$ con una trasformazione a pressione costante. Determinare (utilizzando i dati sotto riportati):

- la densità del vapore d'acqua a $t_F = 110^\circ\text{C}$ (si supponga valida l'equazione di stato dei gas perfetti in tutta la fase vapore dell'acqua)
- il lavoro fatto nella trasformazione da liquido a vapore, considerando trascurabile il volume del liquido
- l'ulteriore lavoro fatto per raggiungere la temperatura t_F
- la variazione della funzione di stato energia interna dell'acqua tra lo stato iniziale a $t_0=45^\circ\text{C}$ e quello finale a $t_F = 110^\circ\text{C}$

Dati :

Calore specifico acqua liquida tra t_0 e t_F $c_p = 4.186 \times 10^3$ J/kg $^\circ\text{C}$

Calore latente di evaporazione a 100°C $\lambda = 2256 \times 10^3$ J/kg

Capacità termica a pressione costante del vapore d'acqua tra 100°C e 110°C $C_p = 34.32$ J/gmole K

Grammo-mole di acqua $M_{acq}=18$ g

Si trascuri la dilatazione termica dell'acqua liquida

ρ (kg/m ³)	1.43	0.571	3.65	0.221
W_2 (kJ)	23.4	12.3	31.7	61.2
W_3 (kJ)	1.64	23.2	0.45	6.44
ΔU (kJ)	431.7	17.8	123.2	826.6

Alla temperatura T_F il vapore d'acqua può essere considerato un gas ideale, per cui si può applicare l'equazione di stato:

$$n = \frac{M}{M_{acq}} = \frac{355}{18} = 19.72 \quad pV = nRT \quad \Rightarrow \quad V_F = \frac{nRT_F}{p_0} = 0.622 \text{ m}^3 \quad \rho = \frac{M}{V} = 0.571 \text{ kg/m}^3$$

Si può considerare il processo come suddiviso in tre stadi successivi: il riscaldamento dell'acqua liquida fino alla temperatura di ebollizione, la vaporizzazione a temperatura costante e il successivo riscaldamento del gas (considerato ideale) fino alla temperatura finale.

Nel primo processo non c'è lavoro, nel secondo e nel terzo processo il vapore, prima, e il gas ideale, poi, si espandono contro la pressione esterna:

$$W_{45 \rightarrow 100} = 0$$

$$W_{100} = nRT = 61.169 \text{ kJ}$$

$$W_{100 \rightarrow 110} = nR(T_F - 373) = 1639 \text{ J}$$

$$W_{tot} = nRT_F = 62.82 \text{ kJ}$$

I calori scambiati nei tre processi sono

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = Mc_p(100 - 45) = 81732 \text{ J} = 81.73 \text{ kJ} \\ Q_2 = M\lambda = 0.355 \cdot 2256 \cdot 10^3 = 800880 \text{ J} = 800.88 \text{ kJ} \\ Q_3 = nC_p(T_F - 373) = 6768.6 \text{ J} = 6.77 \text{ kJ} \end{array} \right.$$

Dal primo principio la variazione di energia interna dell'acqua a seguito del processo complessivo è:

$$\Delta U_{tot} = Q_{tot} - W_{tot} \quad \Delta U_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 - W_{tot} = 826.56 \text{ kJ}$$

Una certa quantità di gas ideale monoatomico compie un ciclo ABCDA costituito da due isoterme reversibili (AB e CD) e da due isocore (BC e DA). Durante il ciclo il gas è a contatto unicamente con i due serbatoi termici, rispettivamente a temperature $T_1=300\text{ K}$ e $T_2=500\text{ K}$. Lungo l'isocora BC il gas scambia con il serbatoio a temperatura T_1 il calore $Q_{BC} = -6235\text{ J}$. Sapendo che il rapporto di compressione $V_B/V_A = 44.7$, calcolare:

- quante moli di gas contiene la macchina
- il lavoro prodotto in un ciclo
- le quantità di calore assorbite o cedute dal gas lungo le trasformazioni isoterme
- il rendimento del ciclo

n(mol)	2.5	1.22	3.9	0.33
W (kJ)	2.55	34.5	0.91	15.8
Q_{AB} (kJ)	23.2	13.3	121.1	39.5
Q_{CD} (kJ)	-23.7	-11.2	-42.5	-90.3
η	0.345	0.221	0.423	0.122

Le trasformazioni che compongono il ciclo, gli stati di equilibrio e i valori delle variabili di stato si possono schematizzare nel modo seguente:

AB isoterma reversibile a T_2
 BC isocora irreversibile
 CD isoterma reversibile a T_1
 DA isocora irreversibile

$$\left\{ \begin{array}{l} n = ? \\ p_A = ? \\ T_A = T_2 = 500\text{ K} \\ V_A = \frac{nRT_2}{p_A} = ? \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} n = ? \\ p_B = ? \\ T_B = T_2 \\ V_B = 44.7V_A \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} n = ? \\ p_C = ? \\ T_C = T_1 = 300\text{ K} \\ V_C = V_B \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} n = ? \\ p_D = ? \\ T_D = T_1 \\ V_D = V_A \end{array} \right.$$

Il calore scambiato nelle isocore è:

$$Q = nC_V(T_F - T_I) \quad Q_{BC} = nC_V(T_1 - T_2) \Rightarrow n = \frac{Q_{BC}}{C_V(T_1 - T_2)} = 2.5$$

$$-Q_{BC} = Q_{DA} = 6235\text{ J}$$

Nelle isoterme reversibili il calore scambiato è uguale al lavoro fatto dal gas:

$$W_{AB} = Q_{AB} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_2 \ln(44.7) = 39.49\text{ kJ}$$

$$W_{CD} = Q_{CD} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -23.69\text{ kJ}$$

$$W_{tot} = W_{AB} + W_{CD} = 15.8\text{ kJ}$$

Il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{W_{tot}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0.345$$