



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale,
Meccanica, Meccatronica

Canale

Compito del 22 giugno 2009

VERDE

Un proiettile viene lanciato all'istante $t = 0$ dall'origine di un sistema cartesiano, con una velocità iniziale $v_0 = 30.2$ m/s. All'istante $t_1 = 3.6$ s il proiettile si trova nella fase di discesa e la sua velocità è $v_1 = 17.1$ m/s. Determinare

- 1) l'angolo fra la velocità iniziale v_0 e l'asse x (angolo di tiro);
- 2) le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione all'istante t_1 ;
- 3) la posizione del bersaglio B posto sull'asse x che viene colpito nell'istante in cui il proiettile ritorna a terra;
- 4) il tempo di volo per colpire il bersaglio B .

θ (gradi)	61.0	21.2	44.3	72.9
a_T [m/s ²]	4.19	5.08	1.23	14.6
a_N [m/s ²]	2.34	6.71	8.38	1.43
x_B [m]	78.87	122.3	34.56	264.0
t [s]	2.45	16.7	8.41	5.39

Il moto del proiettile si svolge nel piano verticale, sotto l'azione dell'accelerazione di gravità:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta - gt \end{cases} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{v_0^2 - v^2 + (gt)^2}{2gtv_0} = 0.875 \quad \Rightarrow \quad \theta = 61.03^\circ$$

La velocità e l'accelerazione tangenziale sono parallele e hanno lo stesso verso nella fase di discesa. Il modulo dell'accelerazione è g . Chiamato α l'angolo che la velocità fa con l'asse delle x all'istante t_1 si ha:

$$\begin{cases} v_x(t_1) = 14.64 \text{ m/s} \\ v_y(t_1) = -8.87 \text{ m/s} \end{cases} \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = -1.65 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -31.21^\circ$$

$$a_T = g \cos \alpha = 5.08 \text{ m/s}^2 \quad a_N = \sqrt{g^2 - a_T^2} = 8.38 \text{ m/s}^2$$

La gittata e il tempo di volo sono dati da:

$$x_{MAX} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = 78.87 \text{ m} \quad t_{MAX} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 5.39 \text{ s}$$

L'asta di una bandiera è costituita da due sbarre omogenee consecutive lunghe ciascuna $L=2.0$ m, la prima, incernierata alla parete nel punto O , di massa $m_1=44$ kg e la seconda di massa $m_2=22$ kg.

Inizialmente l'asta è tenuta in equilibrio da una fune inestensibile orizzontale che congiunge la parete verticale di appoggio con il punto di mezzo della sbarra superiore. La lunghezza della fune è $CD=1.27$ m

Si determinino:

- la tensione nella fune
- il modulo della reazione vincolare R nel punto O ,

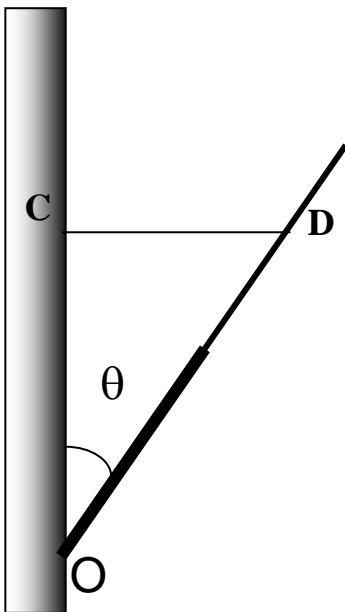
- l'angolo che la reazione fa con la parete verticale,

Viene tagliata la fune e l'asta ruota sotto l'azione della sua forza peso, frenata da un momento di attrito costante sulla cerniera in O. Si osserva che quando il centro di massa dell'asta passa per l'orizzontale la sua velocità angolare è $\omega=2$ rad/s

Si determinino

- il momento di inerzia dell'asta per rotazione attorno al punto O
- il modulo del momento di attrito

T(N)	70.9	455.6	205.8	167.6
R(N)	640.3	668.2	500.7	486.3
α (°)	17.5	14.2	25.0	22.8
I(kgm ²)	80.7	187.0	205.3	264.0
M _{att} (Nm)	395.9	418.6	320.0	175.5



Le forze che agiscono sull'asta sono la forza peso, la tensione della fune e la reazione vincolare in O. Si può calcolare l'equilibrio dei momenti rispetto al punto O, nel quale la reazione non agisce. Assumendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale levogiro con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale, la prima e la seconda equazione cardinale della dinamica danno:

$$0 = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} \quad 0 = \vec{M}_{O,T} + \vec{M}_{O,peso}$$

$$\begin{cases} 0 = -(m_1 + m_2)g + R_y \\ 0 = R_x - T \\ 0 = -g \frac{L}{2} (m_1 + 3m_2) \sin \theta + \frac{3}{2} LT \cos \theta \end{cases} \quad \vec{r}_{CM} = \frac{L}{2} \frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} \sin \theta \cdot \vec{u}_x + \frac{L}{2} \frac{m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} \cos \theta \cdot \vec{u}_y$$

$$CD = \frac{3}{2} L \sin \theta \quad \theta = \arcsen\left(\frac{2CD}{3L}\right) = 25.04^\circ$$

Da sopra si ricava:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_y = (m_1 + m_2)g = 646.8N \\ R_x = T \\ T = \frac{g}{3}(m_1 + 3m_2)\operatorname{tg}\theta = 167.56N \end{array} \right. \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 668.2N \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{R_x}{R_y}$$

$$\alpha = 14.52^\circ$$

Il momento di inerzia dell'asta, per rotazione attorno ad O è la somma dei momenti di inerzia delle due sbarre che la costituiscono:

$$I_{tot} = I_1 + I_2 \quad I_1 = \frac{m_1 L^2}{3} = 58.67 \text{kgm}^2 \quad I_2 = \frac{m_2 L^2}{12} + m_2 \left(L + \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{7}{3} m_2 L^2 = 205.33 \text{kgm}^2$$

$$I_{tot} = 264.0 \text{kgm}^2$$

Quando la fune viene tagliata, il moto si svolge sotto l'azione della forza peso (conservativa) e dell'attrito (non conservativo). Il lavoro fatto dal momento di attrito è uguale alla variazione di energia meccanica. Ponendo lo zero dell'energia potenziale della forza peso nella posizione orizzontale si ha:

$$E_f - E_i = W_{att}$$

$$E_i = \frac{L}{2}(m_1 + 3m_2)g \cos\theta = 977J \quad E_f = \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 = 528J$$

$$W_{att} = -M\varphi \quad \varphi = 90 - 25 = 65^\circ = 1.134 \text{rad} \quad M = 395.9 \text{Nm}$$

Un cilindro munito di pistone scorrevole senza attrito contiene del gas ideale biatomico in equilibrio con la pressione atmosferica $P_A = 10^5 \text{Pa}$ e in equilibrio termico con una sorgente a temperatura $T_A = 600K$. Mantenendo il pistone bloccato, si mette il cilindro a contatto con una sorgente a temperatura $T_B = 300K$, fino all'equilibrio. Si misura che il calore ceduto alla sorgente è $Q_{AB} = -1871J$. Il cilindro è poi isolato dall'ambiente e compresso molto lentamente fino a ritornare alla pressione iniziale. A questo punto il sistema è rimesso a contatto con la sorgente a temperatura T_A fino a riguadagnare lo stato di equilibrio iniziale. Calcolare:

1. Il lavoro prodotto in un ciclo
2. Il rendimento

3. a: per gli studenti iscritti al primo anno di corso quest'anno. Ordinamento legge 270

La variazione di entropia dell'universo, a seguito del ciclo

b: per gli studenti degli anni precedenti. Ordinamento legge 509

La variazione di energia interna della sorgente calda

W(J)	514.5	174.7	425.7	98.1
η	0.085	0.12	0.34	0.021
$\Delta S(\text{J/K})$	9.45	1.37	4.21	2.83
$\Delta U_A(\text{J})$	-2046	-3216	-1332	-1827

Il ciclo è composto da una trasformazione isocora, da un'adiabatica reversibile (quasi statica) e da un'isobara.

Nella trasformazione AB viene scambiato il calore Q_{AB} , portando il sistema dalla temperatura T_A alla temperatura T_B , il numero di moli di gas che costituiscono il sistema si ricava, allora, facilmente. Considerando che la trasformazione BC è adiabatica reversibile l'equazione di Poisson permette di calcolare T_C e quindi, noto T_C , si può calcolare il calore scambiato nella trasformazione CA. Di conseguenza il lavoro, che è anche uguale alla somma dei calori complessivamente scambiati.

$$T_B = \frac{T_A}{2} \Rightarrow p_B = p_A / 2 = p_0 / 2 \quad n = \frac{Q_{AB}}{C_V(T_B - T_A)} = 0.3$$

$$T_B p_B^\gamma = T_C p_C^\gamma \Rightarrow T_C = T_B \left(\frac{p_B}{p_C} \right)^\gamma = T_B \left(\frac{p_0}{2p_0} \right)^\gamma = 365.7K$$

$$Q_{CA} = nC_p(T_A - T_C) = 2045.7J$$

$$W = Q_{AB} + Q_{CA} = 174.7J \quad \eta = \frac{W}{Q_{ass}} = \frac{174.7}{2045.7} = 0.0854 = 8.54\%$$

Il gas non varia la sua entropia a seguito del ciclo, la variazione di entropia dell'universo è data solo dalla variazione di entropia delle sorgenti:

$$\Delta S_U = -\frac{Q_{AB}}{T_B} - \frac{Q_{CA}}{T_A} = 2.83J/K$$

Le sorgenti non compiono lavoro, il primo principio della termodinamica comporta che:

$$\Delta U_{fredda} = -2045.7J$$