

**ELEMENTI DI TEORIA DEGLI  
ERRORI DI MISURA**

Appunti curati da P. Ronchese

# 1 Misura delle grandezze fisiche

Ogni grandezza fisica è rappresentata completamente da uno o piú numeri ( a seconda che si tratti di grandezza scalare o vettoriale ) seguiti dall'unità di misura, cioè dal simbolo della grandezza ad essa omogenea che si è scelta convenzionalmente come grandezza campione, ad esempio il metro (m) per la lunghezza, il chilogrammo (kg) per la massa, il Tesla per l'induzione magnetica e cosí via.

Il numero che rappresenta la misura della grandezza fisica in questione può essere ottenuto attraverso due metodi distinti.

## 1.1 Metodo di misura diretta

Si esegue direttamente il confronto, secondo un procedimento operativo che fa parte della definizione stessa della grandezza, tra la grandezza da misurare ed il campione, ovvero un'altra grandezza omogenea di misura nota. Ad esempio, la lunghezza di un foglio di carta può essere determinata appoggiando su di esso una riga millimetrata: la misura della lunghezza è la differenza tra le graduazioni corrispondenti alle estremità del foglio.

## 1.2 Metodo di misura indiretta

Si calcola il valore della grandezza attraverso una relazione analitica che ne dà l'espressione in funzione di altre grandezze a loro volta misurate direttamente. Ad esempio, la velocità di un corpo può essere calcolata come quoziente tra lo spazio percorso ( misurato direttamente con un metro campione ) ed il tempo impiegato a percorrerlo ( misurato direttamente con un cronometro ).

# 2 Errori di misura

## 2.1 Sensibilità degli strumenti

Ogni misura implica un giudizio sull'uguaglianza tra la grandezza incognita e la grandezza campione ( o eventualmente un suo multiplo o sottomultiplo ). È chiaro che tale giudizio non può essere assoluto, ma dipende dalle condizioni in cui la misura viene effettuata. Cosí nell'esempio citato sopra, se la misura di lunghezza viene effettuata con una riga millimetrata, sarà possibile effettuare il confronto con una incertezza di mezzo millimetro in piú o in meno. Se ad esempio si osserva che, posto uno dei bordi del foglio in corrispondenza dello zero, l'altro si trova tra le graduazioni 572 e 573 , si potrà scrivere:

$$0.572\text{m} \leq l \leq 0.573\text{m} \quad (1)$$

o anche, piú comunemente:

$$l = (0.5725\text{m} \pm 0.0005\text{m}) \quad (2)$$

Si dice in questo caso che la misura di lunghezza è stata eseguita con una "sensibilità" di 0.5mm . È chiaro che se la misura si esegue con una stecca graduata in centimetri, la sensibilità risulta invece di 0.5cm .

In generale si definisce **sensibilità di uno strumento** ( o del procedimento sperimentale in cui viene usato ) la minima differenza apprezzabile tra il valore della grandezza da misurare e quella campione; comunemente la sensibilità così definita corrisponde alla differenza tra due graduazioni dello strumento. In alcuni casi una osservazione particolarmente accurata può consentire di effettuare misure con sensibilità migliore; la stima della sensibilità ( mezza divisione, come nell'esempio precedente, o una frazione minore ) viene fatta in tali casi dall'operatore in base alla sua conoscenza dello strumento ed alla accuratezza della misura. Non ha comunque senso riportare il risultato di una misura indicando un numero di cifre decimali maggiore di quello necessario per indicare la sensibilità della misura.

Si può a questo punto pensare di migliorare la qualità di una misura usando strumenti e procedimenti di sensibilità migliore; interviene però un fatto nuovo, che illustreremo facendo ancora ricorso all'esempio precedente.

Si supponga di voler misurare la lunghezza di un foglio con una sensibilità di un millesimo di millimetro ( $\mu\text{m}$ ) . Ripetendo varie volte la misura si ottengono ad esempio i seguenti valori:

$$1^{\text{a}} \text{ misura: } l = 572.432\text{mm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ misura: } l = 572.433\text{mm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ misura: } l = 572.441\text{mm}$$

$$4^{\text{a}} \text{ misura: } l = 572.439\text{mm}$$

I risultati delle misure differiscono tra loro in quanto sono presenti errori di misura superiori alla sensibilità dello strumento; esistono cioè degli effetti che influenzano il risultato della misura in modo non costante, e la cui presenza è rivelata da uno strumento molto sensibile.

Ogni misura è affetta da errori e di conseguenza il “valore vero” di una grandezza non è mai noto; se talvolta si parla di valore vero si intende semplicemente il valore che è stato ottenuto, o si otterrebbe, eseguendo la misura in condizioni tali da ridurre gli errori a valori molto minori degli attuali.

## 2.2 Classificazione degli errori

Gli **errori di misura** si possono suddividere in **sistematici** e **casuali**.

Alla prima categoria appartengono gli errori che falsano la misura sempre nello stesso modo. Ad esempio, un “metro” campione lungo 999mm fornirà sempre delle misure errate per eccesso; un voltmetro di resistenza interna troppo bassa farà sempre diminuire la differenza di potenziale da misurare.

Gli errori sistematici più grossolani, derivanti da veri e propri difetti degli strumenti usati o da effetti che falsano la misura in modo noto, possono essere eliminati utilizzando strumenti ben calibrati o apportando opportune correzioni ai risultati ottenuti. Diverso è il caso degli errori sistematici derivanti dalla dipendenza, nelle misure indirette, da altre grandezze fisiche a loro volta affette da errore, o derivanti dall'impossibilità di realizzare strumenti assolutamente perfetti; la riduzione degli errori sistematici in questi casi risulta anche molto difficile o impossibile.

Gli errori casuali sono invece quelli che intervengono in maniera diversa ed imprevedibile ( da cui il nome “casuali” ) ad ogni misura, portando a risultati diversi per varie

misure della stessa grandezza quando la sensibilità sia sufficientemente spinta. Gli errori casuali possono essere dovuti a varie cause:

- condizioni sperimentali ( p.e. temperatura ) fluttuanti
- disturbi estranei alla misura ( p.e. vibrazioni )
- definizione vaga della grandezza da misurare ( p.e. diametro di un corpo non perfettamente sferico )

La presenza di errori casuali nella singola misura è ovviamente a priori inevitabile; l'analisi di numerose misure della stessa grandezza consente però di ridurre l'effetto, nei modi descritti nei paragrafi seguenti.

## 2.3 Principio della media aritmetica

Supponiamo di aver misurato  $n$  volte una grandezza fisica  $X$  con lo stesso strumento ed in condizioni identiche. Siano:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (3)$$

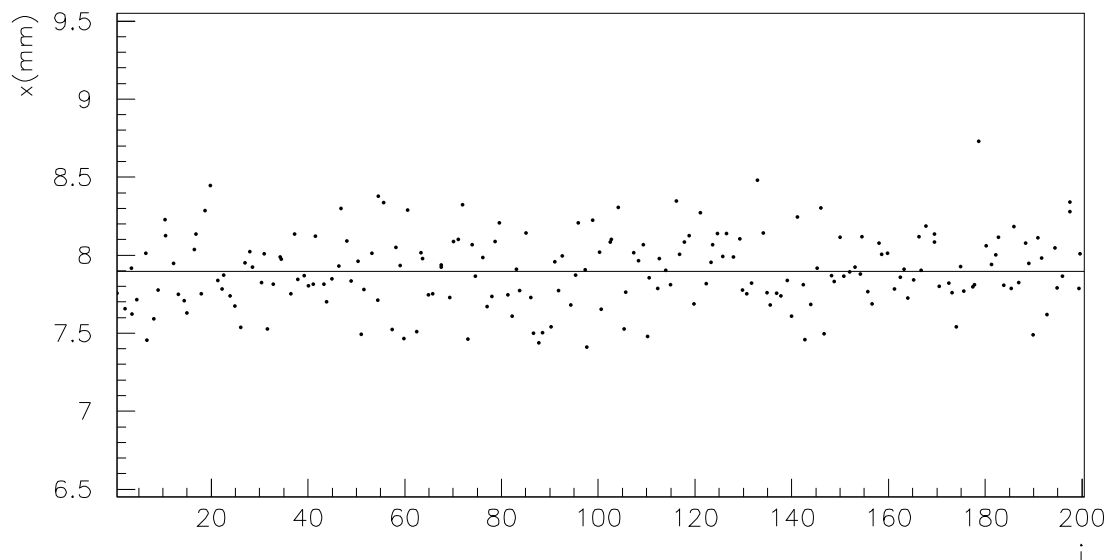
gli  $n$  valori ottenuti, generalmente diversi per la presenza di errori casuali; supporremo inoltre di aver eliminato ogni errore sistematico. La più semplice rappresentazione grafica dell'insieme delle  $n$  misure consiste in un diagramma cartesiano, come quello mostrato in fig.1 che corrisponde ad un insieme di 200 valori misurati di una stessa grandezza  $X$ . In un grafico di questo tipo, o **ideogramma**, si riporta in ascissa il numero d'ordine  $i$  della misura, in ordinata il valore misurato; è opportuno poi tracciare come riferimento una retta orizzontale in corrispondenza del valore medio delle  $n$  misure, la cui determinazione verrà descritta nel seguito. Uno sguardo all'ideogramma permette di avere subito un'idea qualitativa della dispersione dei dati e di osservare l'eventuale variazione delle condizioni sperimentali; se non si sono verificate situazioni anomale i punti risultano addensati vicino alla linea che indica il valore medio.

Si presenta a questo punto il problema di quale valore assegnare alla grandezza  $X$  in questione; è necessario in pratica scegliere un valore come migliore stima del valore vero, che rimane ignoto, in base ad un criterio giustificabile. Per esempio si può scegliere come stima del valore vero il valore che è stato ottenuto il maggior numero di volte, che prende il nome di **moda** ed è indicato con il simbolo  $\hat{x}$ ; può però verificarsi il caso che in una particolare sequenza di misure siano molto più numerosi i valori maggiori ( o minori ) della moda, facendo quindi supporre che lo stesso avvenga per il valore vero, o addirittura può avvenire che esistano due o più valori ottenuti con uguale frequenza, tra cui non è possibile effettuare la scelta.

Un altro criterio consiste nella scelta del valore  $\tilde{x}$  che risulta maggiore del risultato ottenuto nella metà delle misure effettuate e minore del risultato ottenuto nella metà rimanente; tale valore prende il nome di **mediana**.

Il valore usato più comunemente come stima del valore vero è dato dalla **media aritmetica** degli  $n$  valori ottenuti:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$



**Figura 1:** Ideogramma.

Tale scelta può essere giustificata con varie considerazioni. Innanzitutto nel calcolo della media aritmetica tutti gli  $n$  valori vengono trattati alla stessa maniera ed il risultato è indipendente dall'ordine in cui sono state fatte le misure. Inoltre lo scarto tra il valore medio ed il valore vero è mediamente minore, in valore assoluto, degli scarti tra le singole misure e lo stesso valore vero. Ciò può essere qualitativamente compreso sulla base delle seguenti considerazioni: gli scarti delle singole misure rispetto al valore vero, in quanto casuali, possono essere sia positivi che negativi; in generale le misure errate per eccesso e per difetto sono circa egualmente numerose. Nel calcolo della media aritmetica gli scarti dal valore vero si sommano algebricamente: si ha quindi una parziale cancellazione degli errori, cosicché la media aritmetica dà un valore più vicino al vero di quanto mediamente non siano le singole misure. Sia infatti  $x^*$  il valore vero ( incognito ) della grandezza in questione; chiameremo **errore della  $i$ -esima misura** la differenza

$$\epsilon_i \equiv x_i - x^* \quad (5)$$

tra il valore misurato e il valore vero. L'errore da attribuire a  $\bar{x}$  sarà

$$\epsilon \equiv \bar{x} - x^* = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) - x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x^*) \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i , \quad (6)$$

dove appare evidente l'effetto di parziale cancellazione degli  $\epsilon_i$  .

### 3 Scarti dalla media e scarto quadratico medio

Nel paragrafo precedente è stato mostrato che la media aritmetica dà, dato un insieme di  $n$  misure di una grandezza  $x$ , una stima del valore vero di tale grandezza che può essere considerata più accurata del valore  $x_i$  di una generica misura tra le  $n$  eseguite. Ovviamente è a questo punto necessario stimare tale accuratezza, che necessariamente dipende, come mostrato dalla formula precedente, dall'accuratezza delle singole misure. Quest'ultima quindi dovrà essere nota, perché facente parte delle specifiche del procedimento di misura o perché determinata in misure simili, oppure dovrà essere determinata a partire dagli stessi valori  $x_i$ .

Nello stesso modo in cui la media aritmetica dei valori  $x_i$  dà una stima del valore vero  $x^*$ , è ragionevole supporre che l'errore della  $i$ -esima misura possa essere stimato sostituendo nella definizione il valore vero  $x^*$  con la media  $\bar{x}$ ; il valore così ottenuto verrà chiamato **scarto dalla media** della  $i$ -esima misura e sarà dato dalla differenza:

$$z_i \equiv x_i - \bar{x} . \quad (7)$$

Si osserva però immediatamente il seguente fatto: se agli errori  $\epsilon_i$  vengono sostituiti gli scarti  $z_i$ , si ottiene la seguente relazione:

$$\bar{z} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) - \bar{x} \equiv 0 . \quad (8)$$

La definizione stessa di media aritmetica implica infatti che la somma ( e quindi la media ) degli scarti sia nulla, per il motivo già citato in precedenza secondo cui gli scarti sono sia positivi che negativi e si annullano nella somma algebrica; per stimare gli errori  $\epsilon_i$  bisogna quindi aggirare questo fatto costruendo una somma di termini tutti positivi. La scelta che sembra più ovvia è data dalla sostituzione di ciascuno scarto con il suo valore assoluto; risulta però molto più conveniente per l'analisi successiva utilizzare i quadrati degli scarti, che pure risultano positivi. Si definisce **varianza** la media dei quadrati degli scarti:

$$S \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 . \quad (9)$$

Per ritrovare una grandezza omogenea a  $x$  è sufficiente a questo punto considerare la radice quadrata della varianza, chiamata **scarto quadratico medio**:

$$\mu \equiv \sqrt{S} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (10)$$

Lo scarto quadratico medio di  $n$  valori  $x_i$  ottenuti dalla misura, ripetuta nelle stesse condizioni, di una grandezza  $x$  permette di stimare quanto il generico valore  $x_i$  ottenuto da una singola misura si scosta dalla media. Poiché i valori  $x_i$  sono diversi tra loro e lo stesso avviene anche per gli scarti  $z_i$  l'espressione "generico" risulta non sufficientemente precisa; una definizione più quantitativa verrà data nel seguito.

Per determinare la varianza ( e quindi lo scarto quadratico medio ) di  $n$  valori  $x_i$  non è necessario calcolare tutti gli scarti, calcolarne il quadrato, ed infine fare la media dei quadrati; un risparmio di calcolo può essere ottenuto sviluppando la definizione e sostituendo alla somma di  $n$  termini uguali il prodotto per  $n$  :

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} n\bar{x}^2 . \quad (11)$$

Utilizzando la definizione di media aritmetica si ottiene infine:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2 . \quad (12)$$

La varianza può quindi essere definita anche come *differenza tra la media dei quadrati e il quadrato della media*; tale definizione viene usata dalle macchine calcolatrici che svolgono le funzioni statistiche.

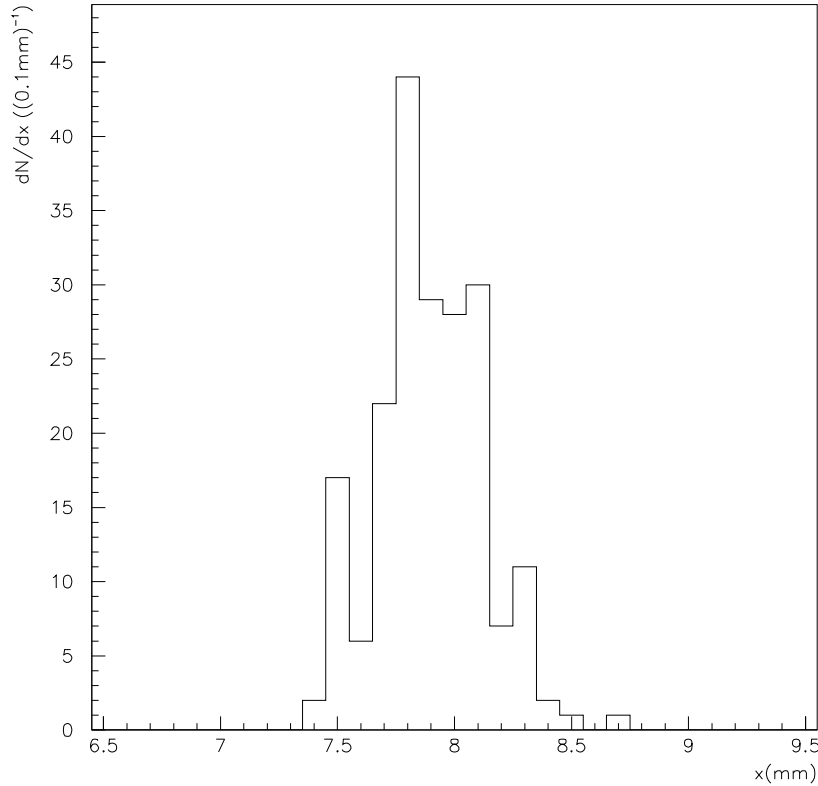
## 4 Legge di distribuzione degli errori casuali

### 4.1 Densità di probabilità

Misurando ripetutamente una stessa grandezza fisica  $X$  si ottengono in generale dei risultati  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  diversi l'uno dall'altro; ci chiediamo dunque quale sia la loro distribuzione. A tale scopo, si può suddividere l'insieme dei numeri reali in intervalli di ampiezza  $\Delta x$  e per ciascuno di essi contare quante volte è stato ottenuto un risultato compreso al suo interno. Il numero così ottenuto risulta approssimativamente pari al numero totale di misure moltiplicato per la probabilità di ottenere un risultato compreso nell'intervallo considerato; l'approssimazione risulta tanto migliore quanto maggiore è il numero di misure effettuate.

Per rappresentare graficamente la distribuzione dei valori, si può costruire un grafico, come quello mostrato in fig.2 , chiamato **istogramma**, in cui in ascissa sono riportati i valori di  $x$  , e su ogni segmento di lunghezza  $\Delta x$  viene costruito un rettangolo di altezza proporzionale al numero di misure il cui risultato è compreso all'interno dell'intervallo corrispondente. È chiaro che, affinché l'istogramma dia una rappresentazione utile della distribuzione, l'ampiezza  $\Delta x$  deve essere scelta in modo tale che i valori più frequenti siano suddivisi in un numero di intervalli non troppo grande e non troppo piccolo: la scelta di un valore di  $\Delta x$  troppo grande ( rispetto all'entità degli errori casuali in gioco ) farebbe infatti cadere la quasi totalità delle misure soltanto in 1 o 2 intervalli, la scelta di un valore troppo piccolo viceversa determinerebbe una distribuzione eccessivamente 'dispersa', con molti intervalli vuoti ed altri popolati da poche misure ( a meno che il numero di misure non sia molto grande ).

La forma dell'istogramma così ottenuto corrisponde, per quanto detto sopra, alla distribuzione di probabilità dei valori ottenuti; in molti casi tale distribuzione può essere espressa analiticamente ed in particolare il caso più comune verrà descritto nel



**Figura 2:** Istogramma

seguito. La funzione matematica che descrive la distribuzione di probabilità permette di calcolare la probabilità di ottenere un risultato contenuto in un generico intervallo  $[x, x + \Delta x]$ , che ovviamente dipende sia dal valore di  $x$  che dalla ampiezza  $\Delta x$ . Se l'ampiezza  $\Delta x$  è abbastanza piccola, e la dipendenza da  $x$  non è troppo grande, la probabilità risulta proporzionale all'ampiezza stessa  $\Delta x$ , e il fattore di proporzionalità prende il nome di **densità di probabilità**; la probabilità di ottenere un risultato compreso nell'intervallo  $[x, x + dx]$  viene quindi espressa con il prodotto:

$$P_{[x, x+dx]} = P(x)dx . \quad (13)$$

La probabilità di ottenere un risultato compreso in un intervallo di ampiezza finita può essere espressa come somma delle probabilità corrispondenti ad infiniti sottointervalli di ampiezza infinitesima; il numero di misure che si prevede diano un risultato compreso tra i valori  $x_1$  e  $x_2$  è quindi dato dal numero totale di misure  $n$  moltiplicato per l'integrale della densità di probabilità:

$$N_{[x_1, x_2]} = n \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx . \quad (14)$$



Poiché la probabilità di ottenere un valore qualsiasi è pari a 1 e il numero di misure che danno risultato compreso tra  $-\infty$  e  $+\infty$  è pari al numero totale  $n$ , si ha che la densità di probabilità deve soddisfare la seguente condizione, chiamata **normalizzazione**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1 . \quad (15)$$

Se, nelle formule che danno la media aritmetica e la varianza, si suppone che il numero di misure  $n$  sia molto grande, i risultati ottenuti si possono di nuovo raggruppare in molti intervalli di ampiezza  $\Delta x$ ; ogni valore  $x$  è quindi presente un numero di volte proporzionale alla probabilità corrispondente all'intervallo a cui esso appartiene. Passando al limite le somme possono quindi a loro volta essere trasformate in integrali; si ottengono quindi le relazioni:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)dx , \quad (16)$$

$$S = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 P(x)dx . \quad (17)$$

Il simbolismo con le parentesi ad angolo viene usato per indicare il valore che, in base al calcolo delle probabilità, viene previsto per la media della grandezza indicata all'interno delle parentesi stesse; tale valore viene chiamato **valore atteso**. Un altro simbolismo usato talvolta utilizza una lettera  $E$  maiuscola seguita dalla grandezza racchiusa tra parentesi tonde:  $E(x)$ .

## 4.2 Distribuzione normale o gaussiana

In generale si osserva che, ripetendo molte volte la misura di una grandezza  $x$ , i valori ottenuti sono meno frequenti quando gli scarti dalla media sono più grandi; inoltre la distribuzione risulta approssimativamente simmetrica rispetto alla media stessa.

Nell'ipotesi che le misure siano indipendenti, ossia che il risultato di una misura non sia condizionato da quello delle misure precedenti, è possibile prevedere teoricamente la funzione analitica che descrive la corrispondente densità di probabilità:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}} . \quad (18)$$

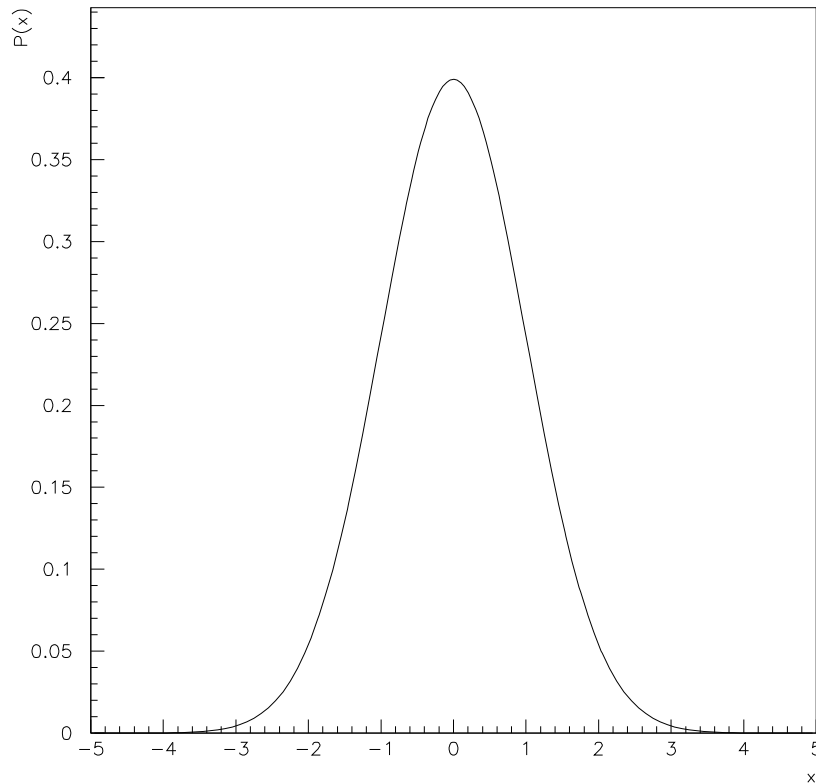
Lo studio della funzione permette di osservare che la densità di probabilità è massima in corrispondenza del valore vero ( $x = x^*$ , in assenza di errori sistematici), si annulla asintoticamente per  $x = \pm\infty$ , e la *larghezza* della distribuzione è proporzionale al parametro  $\sigma$ , che è dimensionalmente omogeneo a  $x$ .

Calcolando gli integrali opportuni (operazione che può presentare qualche difficoltà e richiedere l'uso di particolari accorgimenti) si può verificare che la condizione di normalizzazione è soddisfatta, ed infatti il fattore moltiplicativo iniziale da cui dipende l'*altezza* della distribuzione è inversamente proporzionale a  $\sigma$ ; valgono inoltre le relazioni:

$$\langle x \rangle = x^* , \quad (19)$$

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma^2 . \quad (20)$$

Le relazioni suddette mostrano che il valore atteso, approssimato dalla media aritmetica per un numero di misure sufficientemente grande, corrisponde al valore vero; il parametro  $\sigma$ , d'altra parte, corrisponde allo scarto quadratico medio. La distribuzione descritta dalla funzione analitica mostrata prende il nome di **distribuzione di Gauss** o **normale**; una rappresentazione grafica della distribuzione normale è mostrata in fig.3 nel caso in



**Figura 3:** Curva gaussiana ( o normale )

cui la media sia nulla e la larghezza sia unitaria.

L'integrale della funzione gaussiana tra estremi diversi da  $\pm\infty$  consente, come detto in precedenza, di determinare la probabilità di ottenere da una misura risultati compresi negli intervalli corrispondenti; particolarmente interessanti sono gli intervalli simmetrici intorno al centro della curva la cui ampiezza viene espressa in funzione di  $\sigma$ . Il 68.3% delle misure dà un risultato il cui scarto dalla media è minore di  $\sigma$ ; in questo senso va interpretata l'affermazione, presente nel paragrafo 3, secondo cui lo scarto quadratico medio dà una stima di quanto il generico valore  $x_i$  si scosta dalla media. La probabilità di ottenere valori il cui scarto dalla media è, in valore assoluto, minore di 2 o 3 volte lo scarto quadratico medio risulta rispettivamente pari al 95.5% e al 99.7% .

Il confronto tra la distribuzione di probabilità, gaussiana in questo caso, con l'istogramma delle misure raccolte è necessario moltiplicare la funzione per l'ampiezza degli intervalli  $\Delta x$  usati nell'istogramma stesso ed infine moltiplicare per il numero  $n$  di misure. In ogni intervallo centrato sul valore  $x$ , quindi, il numero di misure previsto è dato da:

$$N(x) = \frac{n\Delta x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\sigma^2}}. \quad (21)$$

### 4.3 Principio della massima verosimiglianza

Dato un campione di misure i cui risultati siano distribuiti in modo normale, cioè con una densità di probabilità descritta dalla funzione mostrata nel paragrafo precedente, la scelta della media aritmetica come migliore stima del valore vero può essere giustificata anche in base ad un altro criterio oltre a quelli già esposti.

La probabilità di ottenere da  $n$  misure l'insieme di risultati  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  è proporzionale al prodotto delle densità di probabilità calcolate per ciascuno dei valori  $x_i$ :

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \propto \prod_{i=1}^n P(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-x^*)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-x^*)^2}{2\sigma^2}}. \quad (22)$$

Poiché i valori  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  si sono effettivamente verificati è ragionevole supporre che la probabilità di ottenerli sia significativa; un criterio per stimare i parametri  $x^*$  e  $\sigma$  che compaiono nell'espressione della densità di probabilità è quindi quello di scegliere i valori che rendono massima tale probabilità.

Il parametro  $x^*$  è presente solo nell'esponente, che compare con un segno “-”; la probabilità risulta quindi massima quando è minimo il valore assoluto dell'esponente, e quindi la somma ( $Q^*$ ) degli scarti al quadrato. Imponendo che sia nulla la derivata rispetto a  $x^*$  si ottiene quindi l'equazione:

$$\frac{dQ^*}{dx^*} = \frac{d}{dx^*} \sum_{i=1}^n (x_i - x^*)^2 = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x^*) = -2 \left( \sum_{i=1}^n x_i - nx^* \right) = 0, \quad (23)$$

che risolta dà:

$$x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (24)$$

dove si ritrova la media aritmetica. Lo stesso risultato si trova derivando direttamente la probabilità rispetto a  $x^*$ ; imponendo che sia nulla la derivata rispetto a  $\sigma$  si ritrova viceversa la varianza:

$$S^* = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x^*)^2, \quad (25)$$

dove è stato usato il simbolo  $S^*$  per indicare che vengono usati gli scarti dal valore vero e non dalla media, come invece avviene nella definizione data nel paragrafo 3 dove vengono usati gli scarti dalla media aritmetica.

Poiché è stato mostrato che la media aritmetica è il valore che rende minima la somma dei quadrati degli scarti, l'uso di qualsiasi altro valore al suo posto porta ad un risultato

che può solo essere piú grande; in particolare ciò avviene anche per il valore vero  $x^*$ . Per correggere questo fatto viene spesso usata una definizione di varianza ( e scarto quadratico medio ) leggermente modificata:

$$\mu^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (26)$$

dove l'uso di  $n-1$  al posto di  $n$  porta ad un risultato piú grande, come richiesto. La scelta di sostituire  $n$  con  $n-1$  si giustifica con il fatto che, poiché nella definizione esiste un valore, che è la media aritmetica, dipendente dagli altri  $n$  valori, il numero di parametri indipendenti viene ridotto di una unità; ciò verrà mostrato in maniera piú approfondita in seguito. Si nota facilmente che la sostituzione di  $n$  con  $n-1$  ha un effetto che diventa molto piccolo fino ad essere trascurabile non appena  $n$  supera qualche unità o decina; ciò è compatibile con il fatto che al crescere di  $n$  la media aritmetica diventa una approssimazione sempre migliore del valore vero.

## 5 Propagazione degli errori

Nei paragrafi precedenti è stata data una descrizione degli errori casuali applicabile nei casi in cui sia disponibile un numero  $n$ , preferibilmente elevato, di misure. Nel caso di misure indirette ciò richiede, oltre alla disponibilità di numerose misure delle grandezze di base, il calcolo ripetuto della grandezza derivata. Quest'ultimo può essere evitato trovando un modo per stimare i parametri descritti ( media e scarto quadratico medio ) per la grandezza derivata una volta noti gli stessi parametri per le grandezze di partenza.

Il caso piú semplice è dato da una grandezza  $F$  espressa come somma di due altre grandezze  $x$  e  $y$ , i cui valori di media e scarto quadratico medio siano rispettivamente  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ .

Per ogni singola coppia di valori misurati  $x_i$  e  $y_i$  delle grandezze  $x$  e  $y$ , la grandezza  $F$  assume il valore

$$F_i = x_i + y_i \quad (27)$$

e di conseguenza il valore medio è

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{x} + \bar{y} \quad (28)$$

mentre lo scarto dalla media della di ogni valore  $F_i$  è dato da

$$z_{F_i} = F_i - \bar{F} = (x_i + y_i) - (\bar{x} + \bar{y}) = (x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y}) = z_{x_i} + z_{y_i}. \quad (29)$$

La varianza di  $F$  è allora

$$S_F \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{F_i}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_{x_i} + z_{y_i})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{x_i}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{y_i}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2(z_{x_i} z_{y_i}) \quad (30)$$

e può venire scritta nel modo seguente:

$$S_F = S_{xx} + S_{yy} + 2S_{xy}. \quad (31)$$

I primi due termini corrispondono alle varianze di  $x$  e  $y$  rispettivamente, mentre il simbolo  $S_{xy}$  rappresenta una grandezza, chiamata **covarianza**, corrispondente alla media dei prodotti degli scarti dalla media di  $x$  e  $y$ ; i simboli  $S_{xx}$  e  $S_{yy}$  vengono talvolta usati al posto di  $S_x$  e  $S_y$  per indicare esplicitamente quali sono le grandezze di cui si considerano gli scarti ( il quadrato infatti è dato dal prodotto di due grandezze uguali ).

Nel caso in cui le misure delle grandezze  $x$  e  $y$  siano indipendenti tra loro, per ogni possibile valore dello scarto  $z_x$  si avrà con eguale probabilità uno scarto  $z_y$  di segno positivo o negativo, e la somma dei prodotti tenderà ad avere un valore piccolo, al limite nullo per un numero molto grande di misure. Da ciò si ricava la relazione

$$\mu_F^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 \quad (32)$$

che è valida, è necessario ricordarlo, solo nel caso in cui le misure siano indipendenti e non sempre. Una relazione che lega gli scarti quadratici medi ed è sempre valida è invece la seguente:

$$\mu_F^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 + 2\rho_{xy}\mu_x\mu_y . \quad (33)$$

Il fattore  $\rho_{xy}$  prende il nome di **coefficiente di correlazione** ed è definito dalla relazione

$$\rho_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} , \quad (34)$$

per cui risulta che  $|\rho_{xy}|$  è sempre minore o uguale a 1 .

Le formule trovate possono essere facilmente generalizzate al caso di  $N$  grandezze  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  di cui  $F$  sia una combinazione lineare:

$$F = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha}x_{\alpha} . \quad (35)$$

Ripetendo lo stesso procedimento si ottengono infatti le relazioni

$$\bar{F} = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha}\bar{x}_{\alpha} , \quad (36)$$

$$S_F = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N c_{\alpha}c_{\beta}S_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha}^2S_{\alpha\alpha} + 2 \sum_{\alpha<\beta} c_{\alpha}c_{\beta}S_{\alpha\beta} , \quad (37)$$

$$\mu_F^2 = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha}^2\mu_{\alpha}^2 + 2 \sum_{\alpha<\beta} c_{\alpha}c_{\beta}\rho_{\alpha\beta}\mu_{\alpha}\mu_{\beta} , \quad (38)$$

dove i termini  $S_{\alpha\beta}$  e  $\rho_{\alpha\beta}$  si annullano nel caso di misure indipendenti; in quest'ultimo caso si nota che, a causa della presenza dei quadrati, le varianze si sommano anche quando la grandezza derivata è data dalla differenza delle grandezze originarie.

Spesso accade che la relazione funzionale  $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$  non sia lineare; tuttavia è possibile generalizzare ulteriormente le relazioni sopra trovate mediante un processo di *linearizzazione*, sviluppando in serie la relazione funzionale nell'intorno dei valori medi

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$ , a patto che gli errori casuali siano sufficientemente piccoli rispetto ai valori misurati, così da rendere accettabile l'approssimazione fatta nello sviluppo in serie. Infatti, per variazioni infinitesime delle variabili  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  rispetto al valore medio, vale il teorema del differenziale totale:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_N} dx_N . \quad (39)$$

Se gli scarti  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$  sono sufficientemente piccoli dalla relazione precedente si ricava lo scarto  $z_{F_i} = F_i - F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)$

$$z_{F_i} \simeq \frac{\partial F}{\partial x_1} z_{1_i} + \frac{\partial F}{\partial x_2} z_{2_i} + \frac{\partial F}{\partial x_3} z_{3_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_N} z_{N_i} \quad (40)$$

e quindi la media

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) + z_{F_i}) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{F_i} . \quad (41)$$

Poiché la relazione precedente mostra come lo scarto  $z_F$  può essere approssimato da una combinazione lineare degli scarti  $z_\alpha$ , con coefficienti pari alle derivate parziali di  $F$ ,

$$z_{F_i} \simeq \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha z_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} z_{\alpha i} , \quad (42)$$

la somma degli scarti  $z_{F_i}$  si annulla, sicché vale l'approssimazione:

$$\bar{F} \simeq F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) . \quad (43)$$

La varianza e lo scarto quadratico medio risultano invece date dalle relazioni:

$$S_F = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\beta} S_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \right)^2 S_{\alpha\alpha} + 2 \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\beta} S_{\alpha\beta} , \quad (44)$$

$$\mu_F^2 = \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \right)^2 \mu_\alpha^2 + 2 \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\beta} \rho_{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta . \quad (45)$$

La radice quadrata di quest'ultima relazione permette di trovare lo scarto quadratico medio di una grandezza misurata indirettamente, qualsiasi sia la dipendenza funzionale, a partire dagli scarti quadratici medi delle grandezze da cui essa deriva; tale relazione costituisce la **legge di propagazione degli errori**.

## 5.1 Propagazione degli errori relativi

Un semplice esempio di misura indiretta, già citato in precedenza, è dato dalla misura della velocità mediante calcolo del rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato. La relazione funzionale è dunque la seguente:

$$v = \frac{x}{t} , \quad (46)$$

di cui si calcolano le derivate parziali:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{t} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}. \quad (47)$$

Se le misure di  $x$  e  $t$  sono indipendenti ( il che avviene nella gran parte dei casi ) lo scarto quadratico medio di  $v$  è dato da:

$$\mu_v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 \mu_x^2 + \left(\frac{x}{t^2}\right)^2 \mu_t^2}. \quad (48)$$

Si può facilmente notare che, dividendo ambo i membri per  $v$  ed elevando al quadrato, si ottiene la relazione ( del tutto equivalente )

$$\left(\frac{\mu_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\mu_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\mu_t}{t}\right)^2. \quad (49)$$

Le quantità adimensionali  $\mu_x/x$  e analoghe prendono il nome di *scarti relativi*; data una generica grandezza  $F$  la cui dipendenza funzionale dalle grandezze  $x_\alpha$  sia data da un prodotto

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) = x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} \dots x_N^{c_N} = \prod_{\alpha=1}^N x_\alpha^{c_\alpha}, \quad (50)$$

il calcolo delle derivate parziali e l'applicazione della legge di propagazione degli errori porta alla relazione:

$$\left(\frac{\mu_F}{F}\right)^2 = \sum_{\alpha=1}^N c_\alpha^2 \left(\frac{\mu_{x_\alpha}}{x_\alpha}\right)^2, \quad (51)$$

nota come *legge di propagazione degli errori relativi*.

## 5.2 Errore della media

Un caso particolarmente interessante di grandezza determinata a partire da altre è dato dalla stessa media aritmetica, che può essere considerata una combinazione lineare di  $n$  grandezze con coefficienti tutti pari a  $1/n$ . Se le  $n$  misure sono tutte indipendenti ( il che non sempre si verifica ) la legge di propagazione degli errori dà il seguente risultato:

$$\mu_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mu^2} = \sqrt{n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mu^2}, \quad (52)$$

da cui si ricava

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}}. \quad (53)$$

Tale relazione esprime in modo quantitativo la maggiore accuratezza della media aritmetica rispetto a ciascuna delle singole misure e mostra come l'approssimazione del valore vero con il valore medio migliori al crescere del numero di misure; è importante notare che tale formula non è valida quando le misure non siano indipendenti, infatti se

esiste una causa di errore che influisce nello stesso modo su tutte le misure, come accade per gli errori sistematici, i termini con i prodotti incrociati degli scarti non si annullano piú ed anche la riduzione dello scarto della media scompare. Nel caso che le varie misure non abbiano uguale accuratezza, invece, non è possibile attribuire a tutte lo stesso errore  $\mu$  e la formula data non è ugualmente piú valida; questo caso verrà trattato nel seguito.

L'errore della media  $\mu_{\bar{x}}$  può essere considerato una stima ( in valore assoluto ) della differenza  $\epsilon$  tra valore medio e valore vero introdotta nel paragrafo 2.3 ; tale differenza risulta uguale alla differenza tra l'errore  $\epsilon_i$  e lo scarto dalla media  $z_i$  per ciascuna misura:

$$\epsilon_i - z_i = (x_i - x^*) - (x_i - \bar{x}) = \bar{x} - x^* = \epsilon . \quad (54)$$

Ciò consente di correggere la stima della varianza:

$$S^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\epsilon + z_i)^2 = \epsilon^2 + \frac{2\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n z_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 . \quad (55)$$

La somma degli scarti dalla media è nulla, come mostrato in precedenza, mentre  $\epsilon$  può essere approssimato con l'errore della media:

$$\sum_{i=1}^n z_i = 0 \quad ; \quad \epsilon^2 \simeq \mu_{\bar{x}}^2 = \frac{S}{n} \simeq \frac{S^*}{n} . \quad (56)$$

Sostituendo nella relazione precedente si trova quindi l'equazione

$$S^* \simeq \frac{S^*}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (57)$$

che risolta dà la stima corretta

$$S^* \simeq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n z_i^2 . \quad (58)$$

corrispondente a quanto riportato nel paragrafo 4.3 .

## 6 Interpolazione lineare

Abbiamo finora trattato quello che possiamo chiamare il “caso unidimensionale” dell'analisi dei dati e del calcolo degli errori, nel senso che partendo da una serie di  $n$  determinazioni di una **stessa grandezza** eseguiti nelle stesse condizioni ci siamo posti il problema di determinarne il piú attendibile indicatore del valore vero, individuandolo nella media aritmetica. Anche nel trattare il problema della propagazione degli errori, abbiamo supposto che di ciascuna grandezza misurata indipendentemente venissero calcolati separatamente la media e l'errore, salvo riunire i risultati nella formula finale.

Affrontiamo ora il caso in cui sia interessante **trattare un insieme di dati relativi a grandezze fisiche diverse** legate tra loro; considereremo il caso piú semplice in cui due grandezze  $x$  e  $y$  sono legate da una relazione di tipo lineare:

$$y = a + bx , \quad (59)$$



dove  $a$  e  $b$  sono due parametri incogniti da determinare in modo tale che la relazione tra  $x$  e  $y$  dia la migliore interpolazione possibile delle  $n$  determinazioni sperimentali  $(x_i, y_i)$  delle grandezze  $x$  e  $y$ . Questo caso è di notevole interesse applicativo, e si presta ad una semplice rappresentazione grafica.

Supponiamo dunque di avere  $n$  coppie di di valori misurati  $(x_i, y_i)$  delle due grandezze. Tranne il caso banale in cui  $n = 2$ , non esiste in generale alcuna coppia di valori dei parametri  $a, b$  per cui la relazione lineare  $y = a + bx$  sia esattamente soddisfatta per tutte le coppie  $(x_i, y_i)$ ; in genere non esiste, infatti, nessuna retta nel piano  $(x, y)$  passante per tutti i punti, i quali non sono mai perfettamente allineati a causa degli errori di misura. I parametri  $a, b$  non possono quindi venire immediatamente determinati, ma se ne può soltanto costruire una stima; tale stima risulta piuttosto semplice se si verificano le seguenti condizioni:

- le misure delle grandezze  $x_i$  e  $y_i$  sono affette da errori indipendenti tra loro
- le misure delle grandezze  $x_i$  sono affette da errori trascurabili
- le misure delle grandezze  $y_i$  sono affette da errori distribuiti in modo normale, con la stessa larghezza  $\sigma_y$  per tutti i punti

Dato un generico punto sulla retta che descrive la relazione tra le due grandezze, la coppia di valori  $(x_i, y_i)$  dà una stima dei “valori veri”  $(x_i^*, y_i^*)$  per cui la differenza  $x_i - x_i^*$  risulta trascurabile secondo le ipotesi fatte; lo scarto del punto misurato dalla retta è quindi dovuto alla differenza  $y_i - y_i^*$ . Poiché i “valori veri” sono legati dalla relazione lineare, tale differenza, rappresentata graficamente in figura 4 da piccoli segmenti verticali, può essere espressa nel modo seguente:

$$\delta y_i = y_i - (a + bx_i) . \quad (60)$$

Assumeremo che la migliore stima dei parametri  $a$  e  $b$  sia quella coppia di valori che minimizza la somma, chiamata  $Q$ , dei quadrati degli scarti  $\delta y_i$ , seguendo quindi un criterio analogo a quello mostrato nel paragrafo 4.3; per questo motivo tale criterio prende il nome di **metodo dei minimi quadrati**.

È quindi necessario esprimere la somma  $Q$  in funzione dei parametri  $a$  e  $b$ :

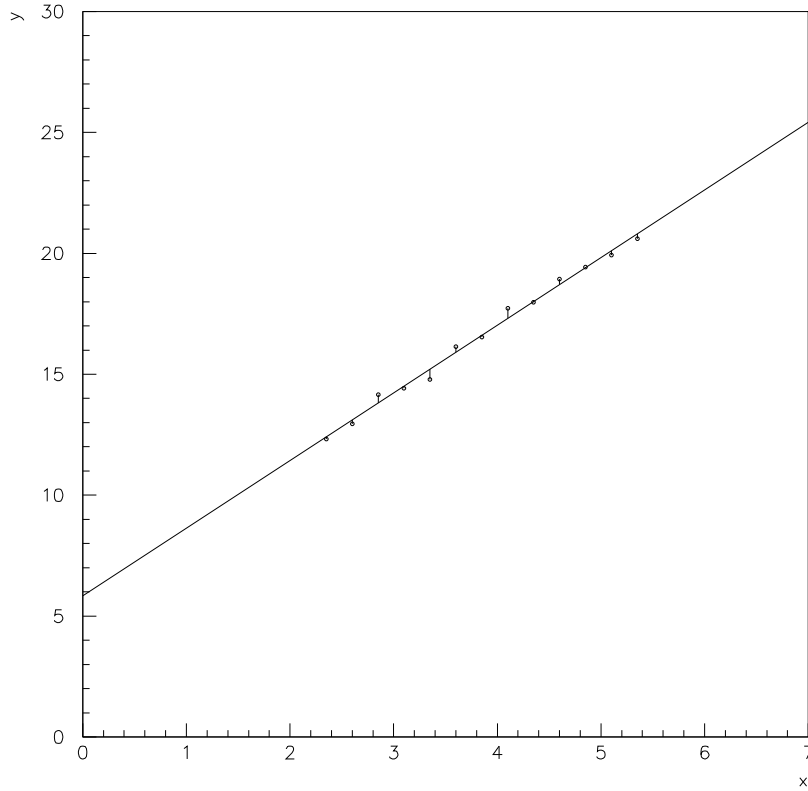
$$Q = \sum_{i=1}^n (\delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 . \quad (61)$$

Il minimo può essere trovato calcolando le derivate parziali di  $Q$  rispetto ad  $a$  e  $b$  ed imponendo che si annullino:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a - bx_i) = 0 . \quad (62)$$

Si trova quindi il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} na & + & b \sum_{i=1}^n x_i & = & \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i & + & b \sum_{i=1}^n x_i^2 & = & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (63)$$



**Figura 4:** Interpolazione lineare

in cui la prima equazione mostra come la somma degli scarti  $\delta y_i$  si annulla; risolvendo il sistema si trova la soluzione:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\
 b &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} .
 \end{aligned} \tag{64}$$

Un altro interessante parametro che può essere determinato a partire dai valori  $x_i$  e  $y_i$  è il *coefficiente di correlazione*, indicato con il simbolo  $r$  e definito dalla formula:

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2) (n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2)}} . \tag{65}$$

Il coefficiente di correlazione  $r$  è sempre di modulo inferiore a 1 e di segno concorde con  $b$ , e risulta tanto più vicino a +1 o -1 quanto più i punti sono allineati. Si può facilmente verificare che la formulazione di  $r$  qui data è equivalente a quella già data nel paragrafo 5 ( equazione 34 ), dalla quale può essere ottenuta sviluppando i prodotti degli scarti.

L'errore quadratico medio sui parametri  $a$  e  $b$  può essere calcolato, analogamente a quanto fatto per la media aritmetica, applicando la legge di propagazione degli errori alle formule sopra scritte, e ricordando che gli errori sulle grandezze  $x_i$  sono trascurabili mentre a tutte i valori  $y_i$  può essere attribuito lo stesso errore  $\sigma_y$ . Svolgendo tutti i calcoli, si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} S_{aa} &= \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 = \sigma_a^2 = \sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ S_{ab} &= \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \right) \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right) = -\sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ S_{bb} &= \sigma_y^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 = \sigma_b^2 = \sigma_y^2 \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}. \end{aligned} \quad (66)$$

È importante notare che i due parametri  $a$  e  $b$  **non sono in genere indipendenti**; ciò è particolarmente importante nel caso che essi vengano utilizzati in calcoli successivi, se nella propagazione degli errori viene infatti trascurata la covarianza  $S_{ab}$  si possono ottenere risultati assolutamente irragionevoli.

Nelle formule date compare l'errore  $\sigma_y$ ; nel caso che esso non sia noto può essere stimato in base agli scarti  $\delta y_i$ :

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{Q}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta y_i)^2}{n-2}}. \quad (67)$$

Tale formula, chiamata **formula di Fisher** è simile a quella che dà lo scarto quadratico medio, da cui differisce per la presenza del termine  $n-2$  al posto di  $n$  ( o  $n-1$  ); tale differenza è dovuta al fatto che, nel calcolo degli scarti  $\delta y_i$ , esistono 2 parametri ( che sono  $a$  e  $b$  ) dipendenti da tutti gli altri. Come per la varianza anche per  $Q$  esiste una formula che permette un risparmio di calcolo:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\delta y_i)^2 = \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \right) (1-r^2) = n S_{yy} (1-r^2). \quad (68)$$

Tale formula è particolarmente utile poiché le macchine calcolatrici tascabili dotate di funzioni statistiche generalmente non forniscono né  $\sigma_y$  né  $Q$ , ma forniscono  $r$  ( coefficiente di correlazione ) e  $S_{yy}$  ( varianza di  $y$  ).

## 7 Media pesata

Abbiamo finora supposto che le varie determinazioni sperimentali di una stessa grandezza fisica fossero eseguite con la stessa precisione, ma può verificarsi anche il caso in cui siano disponibili più misure di una stessa grandezza ottenute con strumenti e/o procedure diverse. In tale caso non è più corretta la scelta di attribuire a tutte le misure la stessa importanza, come nella media aritmetica; è necessario invece trovare una combinazione in cui le misure più precise abbiano una importanza maggiore. Al posto della media aritmetica può essere utilizzata una combinazione, anch'essa lineare, in cui ogni valore  $x_i$

è pesato con un coefficiente  $a_i$  mentre il numero di misure è sostituito dalla somma dei coefficienti:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}. \quad (69)$$

La scelta di tale combinazione, chiamata **media pesata**, può essere giustificata ancora una volta in base al principio della massima verosimiglianza descritto nel paragrafo 4.3. Nel caso in cui le misure siano tutte tra loro indipendenti ciò porta a scegliere il valore  $x^*$  che rende minima la somma

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x^*)^2}{\sigma_i^2}, \quad (70)$$

dove  $\sigma_i$  è l'errore sulla  $i$ -esima misura. Imponendo che sia nulla la derivata rispetto a  $x^*$  si ottiene l'equazione

$$-2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x^*}{\sigma_i^2} = 0 \quad (71)$$

la cui soluzione è:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (72)$$

Si osserva facilmente che il *peso* di ogni misura è inversamente proporzionale al quadrato dell'errore sulla misura stessa, nella combinazione di misure con errori molto diversi quindi i valori affetti da errori più grandi hanno un peso trascurabile. Ciò si osserva anche nel calcolo, secondo la legge di propagazione, dell'errore sul valore medio così trovato:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2 \sigma_i^2}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \quad (73)$$

Si può facilmente osservare che l'errore sulla media è minore di tutti gli errori sulle singole misure, ma la combinazione di valori con errori molto diversi porta ad un errore finale che differisce in modo trascurabile dal più piccolo degli errori di partenza. La media pesata, così definita, corrisponde anche alla combinazione lineare per cui è minimo l'errore.

È interessante studiare il caso della combinazione di  $N$  valori  $\bar{x}_i$  ottenuti dalla media aritmetica dei risultati di molte misure, ripetute nelle stesse condizioni ed affette dallo stesso errore  $\sigma$ , divise in  $N$  campioni composti ciascuno da  $n_i$  misure e senza alcuna sovrapposizione. In questo caso ogni valore  $\bar{x}_i$  è affetto da un errore  $\sigma_i$  pari a

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}} \quad (74)$$

e quindi la media pesata  $\bar{x}_0$  è data da:

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\bar{x}_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{n_i \bar{x}_i}{\sigma^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{n_i}{\sigma^2}} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^N n_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)}{\sum_{i=1}^N n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} x_i}{n_0}, \quad (75)$$

dove  $x_{ij}$  è il risultato della  $j$ -esima misura dell' $i$ -esimo campione e  $n_0$  è il numero totale di misure; la media pesata delle  $N$  medie quindi corrisponde alla media aritmetica di tutte le misure. Analogamente l'errore sul valore combinato è dato da:

$$\sigma_{\bar{x}_0} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{n_i}{\sigma^2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^N n_i}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}} \quad (76)$$

e corrisponde all'errore sulla media aritmetica.

## 7.1 Misure correlate

Nell'esempio precedente è stato considerato il caso che nessuna misura venga utilizzata in più di un campione, sicché le  $N$  medie sono tra loro tutte indipendenti. Nel caso in cui si vogliano combinare  $N$  misure correlate è necessario conoscere non solo i corrispondenti errori, ma anche le covarianze per tutte le coppie, in modo da poter costruire una matrice  $S$  di dimensioni  $N \times N$  i cui elementi diagonali sono dati dagli errori al quadrato (cioè le varianze) e gli elementi non diagonali corrispondono alle covarianze. La media pesata e il corrispondente errore sono dati allora da formule leggermente modificate rispetto alle precedenti:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}} \\ \sigma_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}}} \end{aligned} \quad (77)$$

dove  $A_{ij}$  sono gli elementi della matrice inversa della matrice  $S$ .

## 7.2 Interpolazione lineare pesata

Il problema di trattare misure con errori diversi può presentarsi anche nell'interpolazione lineare; seguendo un procedimento analogo a quelli mostrati in precedenza si trovano

per questa situazione le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \\
b &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \\
r &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right)}} \\
S_{aa} &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \\
S_{ab} &= - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} \\
S_{bb} &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2} .
\end{aligned} \tag{78}$$