Laboratorio di Fisica per i Corsi di Ingegneria Gestionale e Meccanica-Meccatronica*

Studio di corpi in moto di puro rotolamento lungo un piano inclinato: misura del momento d'inerzia di un solido di rotazione.

Discussione dell'esperienza

Le accelerazioni del CM di un cilindro, in moto di puro rotolamento su un piano inclinato, sono diverse nella salita e nella discesa a causa dell'attrito volvente; in entrambi i casi tuttavia, il moto del CM del corpo è rettilineo e uniformemente accelerato. Le forze ed i momenti che causano il moto sono dunque costanti in ciascuna delle due fasi analizzate (salita e discesa). Il momento degli attriti (attrito volvente) è costante in modulo e varia solo per il segno che deve sempre essere opposto a quello della velocità angolare.
Le equazioni per il rotolamento in discesa e per quello in salita sono:

salita $$I\frac{a_s}{R} = mgR\sin\vartheta + K^{s}{}_{attrito}$$ discesa $$I\frac{a_d}{R} = mgR\sin\vartheta - K^{d}_{attrito}$$

dove: $a_s = \alpha_s * R$ e $.a_d = \alpha_d * R$. Si considera il moto puramente rotatorio con asse di istantanea rotazione passante per il punto di contatto del corpo con il piano. *I* indica il momento d'inerzia del corpo rispetto all' asse; *m* è la massa del rotolante; *R* è la distanza tra il punto di contatto e il CM (in generale il raggio del corpo in rotazione); θ è l'inclinazione del piano inclinato.
Sommando membro a membro le due equazioni sopra riportate e supponendo che i due momenti d'attrito siano uguali in modulo nel tratto considerato[1], si ottiene:

$$I(\frac{a_d}{R} + \frac{a_s}{R}) = 2mgR\sin\vartheta \qquad 1)$$

Questa equazione vale per un qualsiasi corpo cilindrico, di momento d'inerzia *I*, in moto di puro rotolamento sul piano dato inclinato di inclinazione *θ.* Quindi per il corpo x generico (pedice *x* su massa, raggio, momento d'inerzia):

$$I_x(\frac{a_{dx}}{R_x} + \frac{a_{sx}}{R_x}) = 2m_x gR_x \sin\vartheta \qquad 2)$$

[1] Prima di utilizzare la formula finale 3) per la misura, devono essere verificate sperimentalmente le condizioni implicite nel modello utilizzato. Questo comporta anzitutto il controllo del moto e della condizione di puro rotolamento. Si può eseguire una rozza misura geometrica, rilevando il numero di giri percorsi dal rotolante e confrontando il percorso con la quantità giri X circonferenza rotolante. Poi nel caso in esame si suppone il corpo a simmetria assiale, quindi le accelerazioni devono essere uniformi. Terza condizione, la disposizione dell'asse di rotazione rispetto all'asse del piano inclinato deve essere la medesima durante il moto in salita ed in discesa. Per questo i piani inclinati devono poggiare su piani orizzontali e il mobile va fatto partire con l'asse perpendicolare alla traiettoria. Infine bisogna ricordare che il momento degli attriti totali è la somma del momento d'attrito volvente e di un termine complicato dipendente da una forza di drag (forza dovuta all'aria circostante). Per poter considerare $K^{s}{}_{attrito}$. e $K^{d}{}_{attrito}$ nella 1) uguali in modulo, dovrebbero essere indipendenti dalla velocità. Questa condizione si può verificare per velocità piccole, tendenzialmente le stesse per i due corpi in esame.

Queste due relazioni permettono di ricavare il momento d'inerzia di un corpo x, dato il momento d'inerzia di un solido semplice e di dimensioni simili, senza dover determinare l'inclinazione del piano. Facendo il rapporto membro a membro di 1) e 2) e ricavando I_x si ottiene infatti :

$$I_x = I * \frac{(\frac{a_d}{R} + \frac{a_s}{R})}{(\frac{a_{dx}}{R_x} + \frac{a_{sx}}{R_x})} * \frac{m_x R_x}{mR} = I * \frac{a^m R_x^2 m_x}{a_x^m R^2 m} \text{con } a^m = (a_s + a_d)/2 \qquad 3)$$

Questa relazione permette di ricavare il momento d'inerzia I_x incognito, dati il momento d'inerzia I di un corpo di riferimento, le masse dei due corpi, le distanze dei loro punti di contatto dai CM, le accelerazioni in salita e in discesa nei loro moti di rotolamento, sullo stesso piano inclinato, nelle stesse condizioni.
Le misure da eseguire sono quindi :

a) dimensioni e masse del solido di riferimento e del solido x
b) misure dell'accelerazione del solido di riferimento e del solido x nel moto di rotolamento lungo il piano inclinato

Nel caso il rotolante di riferimento sia un solido pieno il suo momento di inerzia si potrà sempre scrivere come

$$I = \alpha \cdot mR^2$$

(dove α è 3/2 nel caso del cilindro). E' quindi più facile scrivere:

$$I_x = \alpha * \frac{a^m}{a_x^m} R_x^2 m_x \qquad 4)$$

Valutazione errori delle misure.

Si utilizza la formula di propagazione dell'errore. Poiché il momento di inerzia dipende da prodotti di variabili, è più veloce stimare l'errore relativo:

L'errore relativo, se si usa la relazione semplificata 4) è:

$$\frac{\Delta I_x}{I_x} = \sqrt{\left(\frac{\delta a_x^m}{a_x^m}\right)^2 + \left(\frac{\delta a^m}{a^m}\right)^2 + \left(2\frac{\delta R_x}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{\delta m_x}{m_x}\right)^2}$$

con $\delta a^m, \delta a_x^m$, errore nelle misure di a^m, a_x^m eseguite (utilizzando la media di un numero sufficiente di campioni, misurati sulle varie salite e discese del cilindro); $\delta R_x, \delta m_x$ gli errori nelle misure dirette di queste grandezze.

Operazioni da eseguire in aula

1) Mettere a livello il piano inclinato e misurarne l'inclinazione.
2) Disporre il sonar sul piano e verificare la che il moto rilevato sia completo.
3) Misurare accuratamente con calibro, nonio e bilancia le dimensioni e le masse dei corpi rotolanti
4) Utilizzare tempi di campionamento superiori a 0.05 s e tempi di acquisizione lungi in modo da avere più di una salita e discesa per acquisizione.
5) Lanciare i rotolanti in modo che percorrano sul piano sempre la stessa traiettoria con asse perpendicolare ai lati corti del piano inclinato

Operazioni di elaborazione dei dati

1) Calcolare il momento d'inerzia del corpo di riferimento (cilindro pieno grande)
2) Ricavare più valori per a^m o a_x^m; eseguire la media delle a^m o a_x^m così calcolate e determinarne l'errore.
   Ricavare il momento di inerzia del campione assegnato dalle misure di accelerazione.

Schema di relazione.

Punti principali per la relazione (non si deve riportare la discussione dell'esperienza come esposta quì sopra, bastano le formule, i dati e le loro elaborazioni):

a) dimensione e masse dei corpi utilizzati e tabella dei dati utilizzati per la relazione (disponibili in formato .txt).
b) calcolo del momento di inerzia del corpo di riferimento, con relativo errore
c) equazioni del moto del sistema analizzato (le equazioni delle forze e quella dei momenti)
d) i grafici da cui sono state ricavate le accelerazioni, con relativa equazione di interpolazione ed errori statistici (interpolazione lineare o parabolica a seconda che il grafico scelto sia velocità o posizione):
e) una tabella con i risultati ottenuti nei grafici analizzati.
f) il valore del momento d'inerzia misurato con relativo errore.

TABELLA DELLE DIMENSIONI E DELLE MASSE DEI CORPI UTILIZZATI NELL'ESPERIENZA

oggetto	massa (kg)	raggio (ext)m	raggio (int)m	
cilindro pieno grande	1.035± ($5\ 10^{-3}$)	$2.60\ 10^{-2}$		***RIFERIMENTO***
cilindro cavo medio	0.515± ($2\ 10^{-3}$)	$2.5\ 10^{-2}$	$1.0\ \ 10^{-2}$	
cilindro pieno piccolo	0.476± ($2\ 10^{-3}$)	$2.60\ 10^{-2}$		
cilindro filettato	0.228± ($2\ 10^{-3}$)	$2.71\ 10^{-2}$	$2.25\ 10^{-2}$	
cilindro plastica bianco	0.264± ($2\ 10^{-3}$)	$4.42\ 10^{-2}$	$3.53\ 10^{-2}$	
anello metallico	0.178± ($2\ 10^{-3}$)	$3.82\ 10^{-2}$	$3.52\ 10^{-2}$	

Gli errori sui raggi sono $\pm 1x\ 10^{-4}$ m

Esempio di dati raccolti
Grafici posizione in funzione del tempo e velocità in funzione del tempo

Cilindro Pieno: