

# Acceleratori di Particelle

A. Pisent

INFN-Laboratori Nazionali di Legnaro

Un acceleratore è un **sistema fisico** (coeso elettromagneticamente) di complessità paragonabile a quella di una molecola.

**Sue caratteristiche:**

- È un sistema **macroscopico** i cui protagonisti sono enti microscopici (elettroni e ioni)
- È un sistema **artificiale**.

# Alcune applicazioni di punta

- Basate
  - Fasci che urtano direttamente un bersaglio fisso o collidono fra di loro
  - Produzione di fasci collimati di luce di sincrotrone
  - Accelerazione di fasci di particelle esotiche
- Fisica delle particelle
  - Struttura atomica e nucleare, fisica delle alte energie, nuove particelle, oltre il modello standard
- Bombardamento di bersagli utilizzati per ottenere nuovi materiali con differenti proprietà chimiche, fisiche e meccaniche.
- La radiazione di sincrotrone copre la spettroscopia, diffrazione di raggi x, microscopia con raggi x, cristallografia delle proteine, preparazione di materiali aeronautici, per la medicina....
- In medicina, i fasci sono utilizzati per la Positron Emission Tomography (PET), e la terapia dei tumori (convenzionale e adroterapia), terapie con neutroni (BNCT).
- Trasmutazione di scorie radioattive, per convertire scorie a lunga vita media in scorie a corta vita media, test dei materiali per nuovi reattori di fusione e fissione.

# Accelerazione:

## Richiamo di cinematica relativistica

- Accelerazione elettrostatica: una particella con carica  $e$  generata in una sorgente a potenziale  $V$  giunta nella linea di fascio a potenziale di terra avrà un'energia cinetica

$$W = eV$$

- Definiamo un'energia  $\gamma$  ed una velocità  $\beta$  adimensionali come:

$$\gamma = 1 + \frac{W}{mc^2} \quad \vec{v} = c\vec{\beta}$$

- con  $m$  massa della particella (938 MeV/c<sup>2</sup> per protoni,  $A \cdot 931.5$  MeV/c<sup>2</sup> per il nucleo di massa  $A$ , 0.511 MeV/c<sup>2</sup> per gli elettroni),  $c=2.998 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$ . Inoltre

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

# Accelerazione:

## Richiamo di cinematica relativistica

- Accelerazione elettrostatica: una particella con carica  $e$  generata in una sorgente a potenziale  $V$  giunta nella linea di fascio a potenziale di terra avrà un'energia cinetica

$$W = eV$$

- Definiamo un'energia  $\gamma$  ed una velocità  $\beta$  adimensionali come:

$$\gamma = 1 + \frac{W}{mc^2} \quad \vec{v} = c\vec{\beta} \quad \boxed{E = Mc^2}$$

- con  $m$  massa della particella (938 MeV/c<sup>2</sup> per protoni,  $A \cdot 931.5$  MeV/c<sup>2</sup> per il nucleo di massa  $A$ , 0.511 MeV/c<sup>2</sup> per gli elettroni),  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . Inoltre

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad \boxed{[mc^2]^2 = E^2 - p^2 c^2}$$



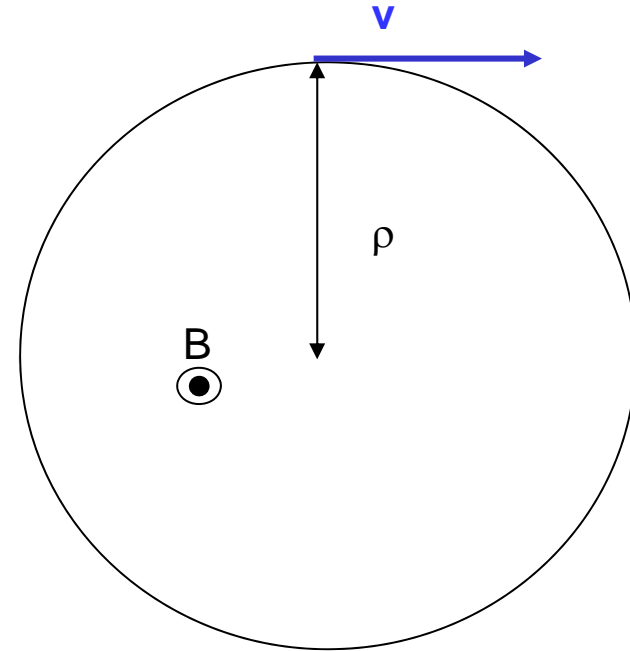
# Orbita in un campo magnetico uniforme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$m\gamma \frac{v^2}{\rho} = evB$$

Forza centrifuga

Forza di Lorentz



$$eB\rho = mc\gamma\beta = p$$

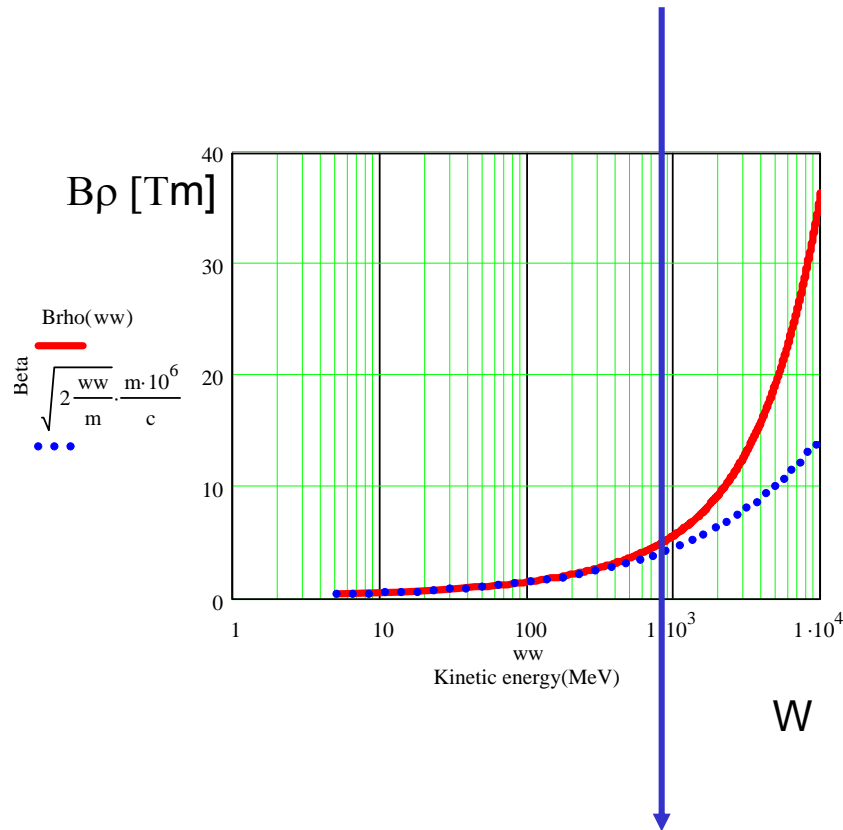
Rigidità magnetica

"Massa"

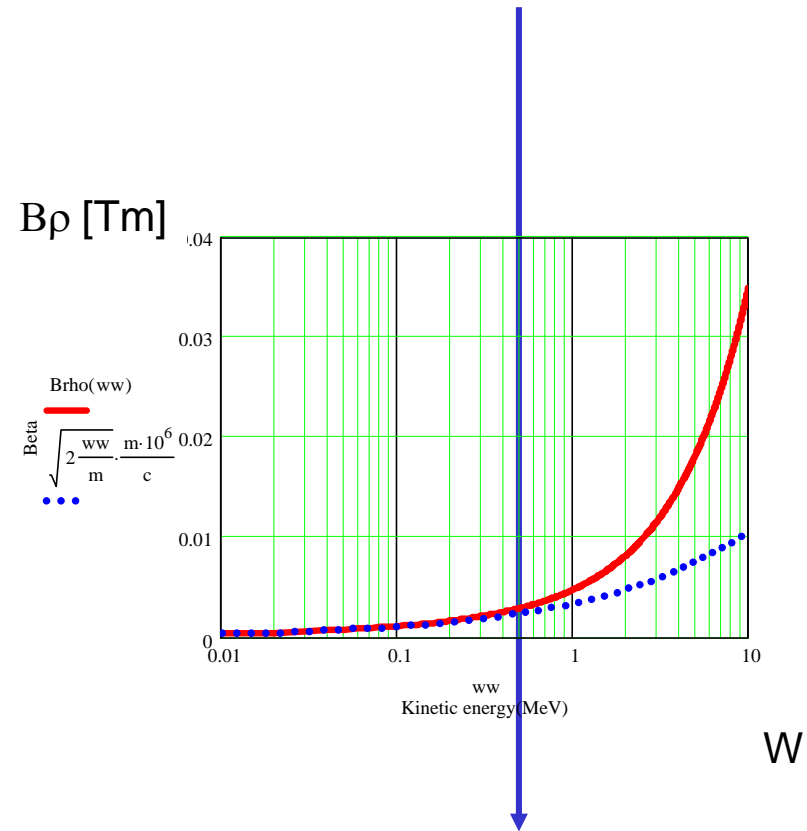
velocità

I limiti tecnologici sul campo magnetico ottenibile (circa **2 T** per magneti normal conduttivi e **10 T** per i superconduttivi) determinano le dimensioni limite degli acceleratori in molti casi

# Orbita in un campo magnetico uniforme



Rigidità magnetica dei protoni ( $mc^2=938$  MeV)  
ed approssimazione non relativistica



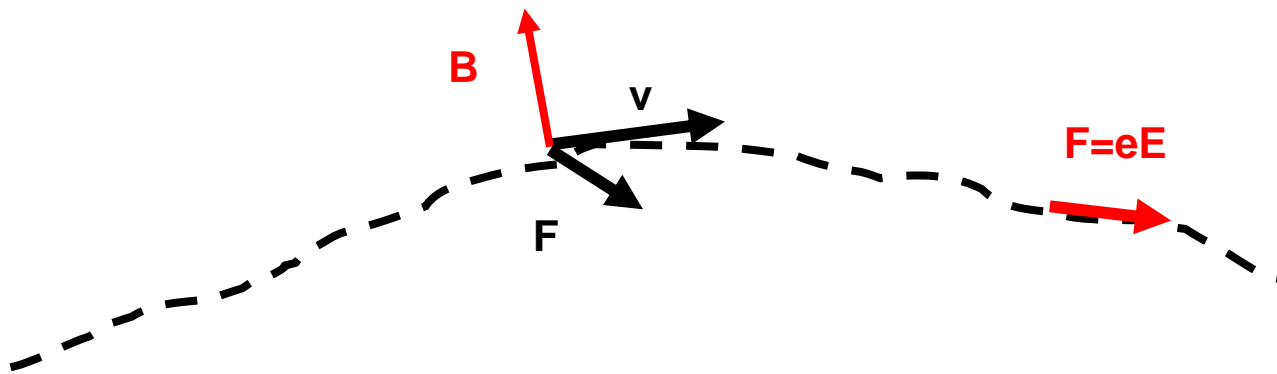
Rigidità magnetica  
degli elettroni ( $mc^2=0.511$  MeV)



# Accelerazione e focalizzazione

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

- All'aumentare della velocità è sempre più conveniente deviare e focalizzare i fasci utilizzando campi magnetici
- Dato che la forza  $\vec{v} \times \vec{B}$  è sempre ortogonale al momento, l'accelerazione (in modulo, vera, o incremento dell'energia cinetica) si può avere solamente con l'uso di campi elettrici

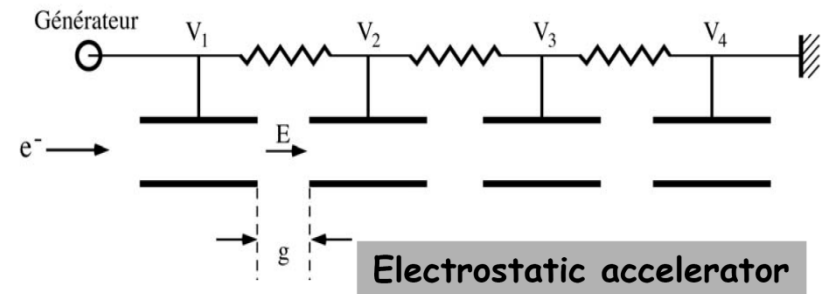


# Accelerazione elettrostatica

- L'energia finale è determinata dalla tensione elettrica ottenibile

$$W = eV$$

- Esistono quindi limiti tecnologici (intorno ai 15-20 MV) per strutture di tipo Van de Graaff riempite di gas inerte ( $\text{SF}_6$ ).

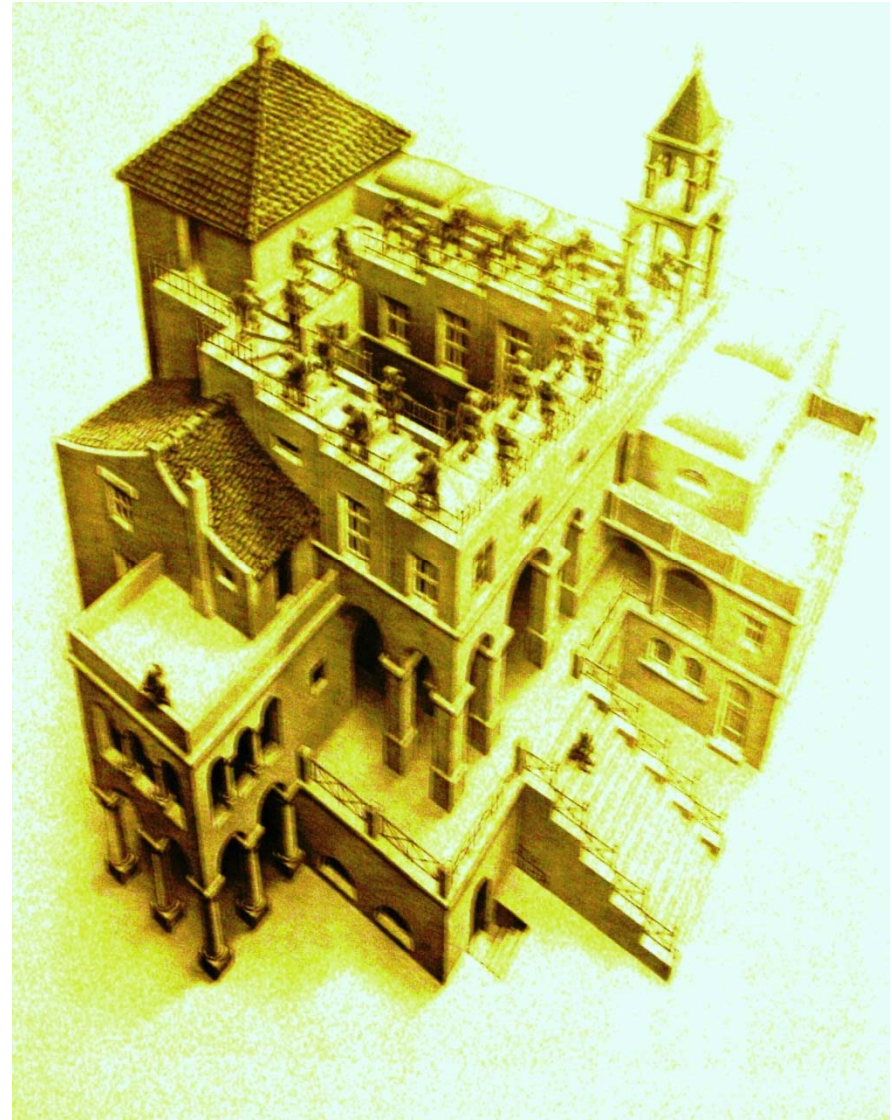


# Accelerazione elettrostatica

- L'energia finale è determinata dalla tensione elettrica ottenibile

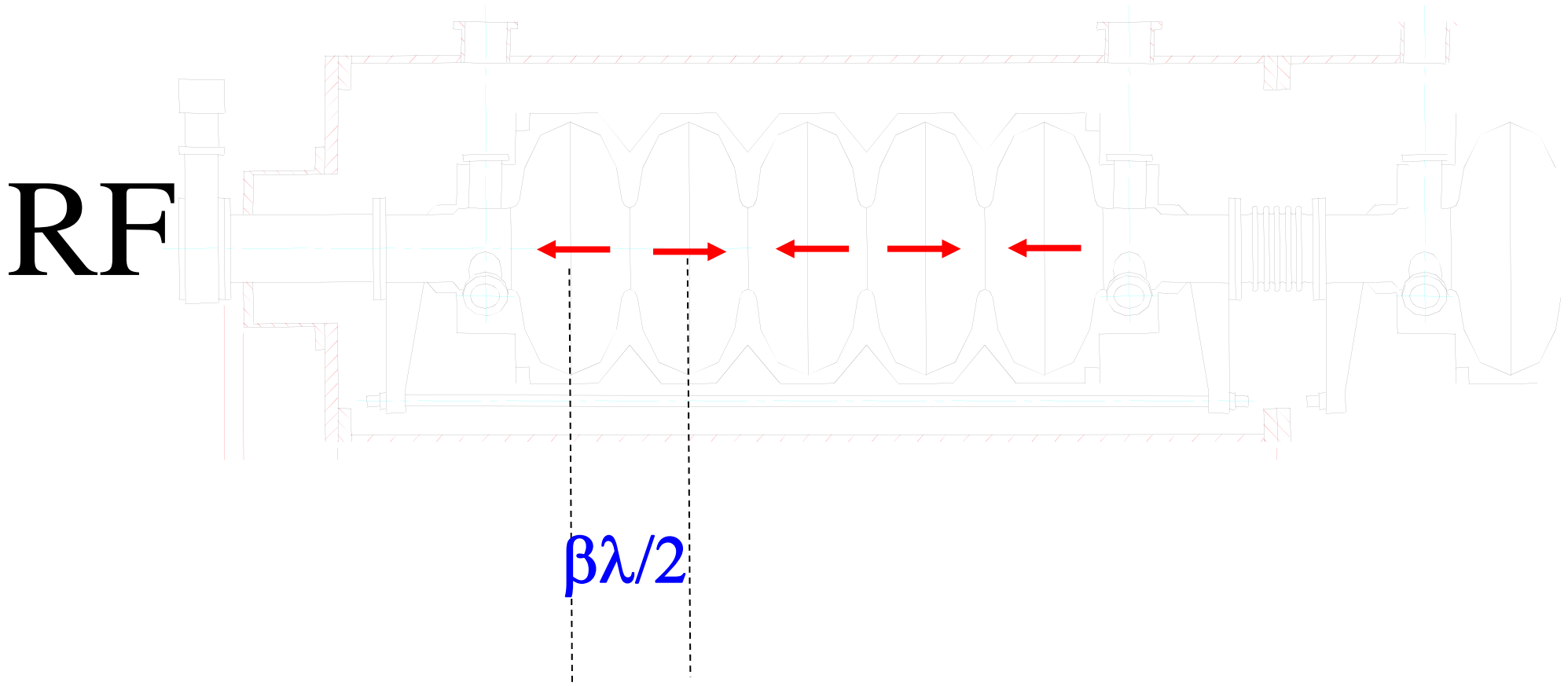
$$W = eV$$

- Esistono quindi limiti tecnologici (intorno ai 15-20 MV) per strutture di tipo Van de Graaff riempite di gas inerte ( $\text{SF}_6$ ).
- Esiste il limite di principio per cui con un campo elettrostatico non si può accelerare lungo un'orbita chiusa

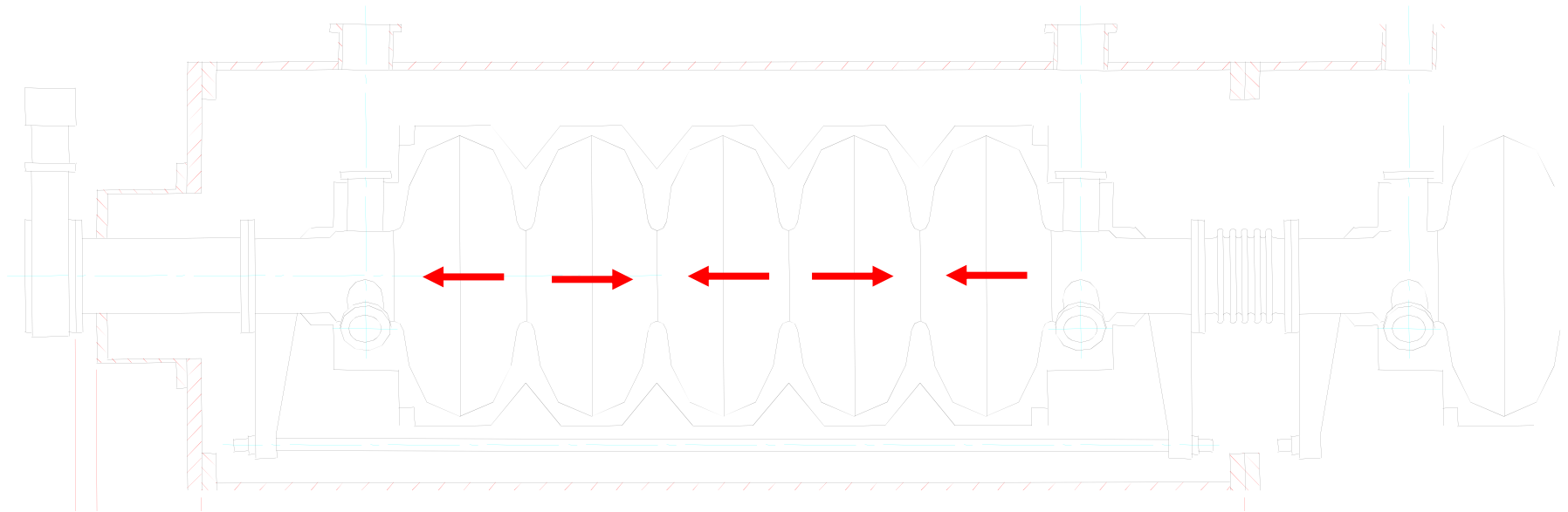


# Accelerazione RF

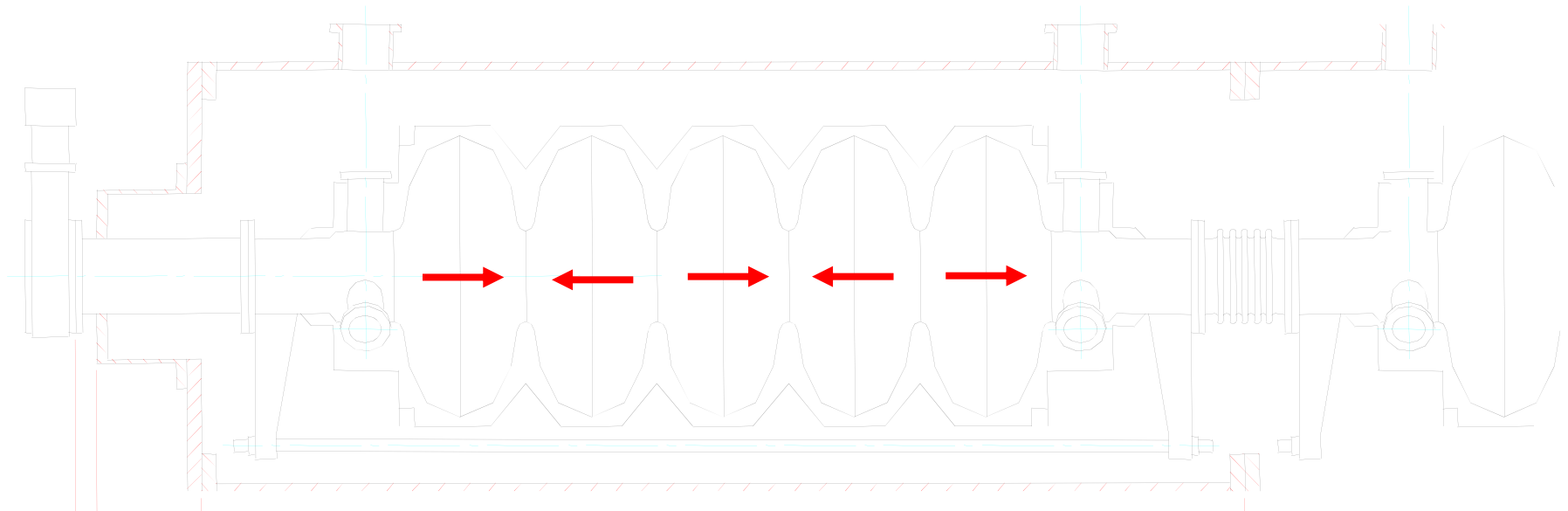
elettrostatico → → → → →



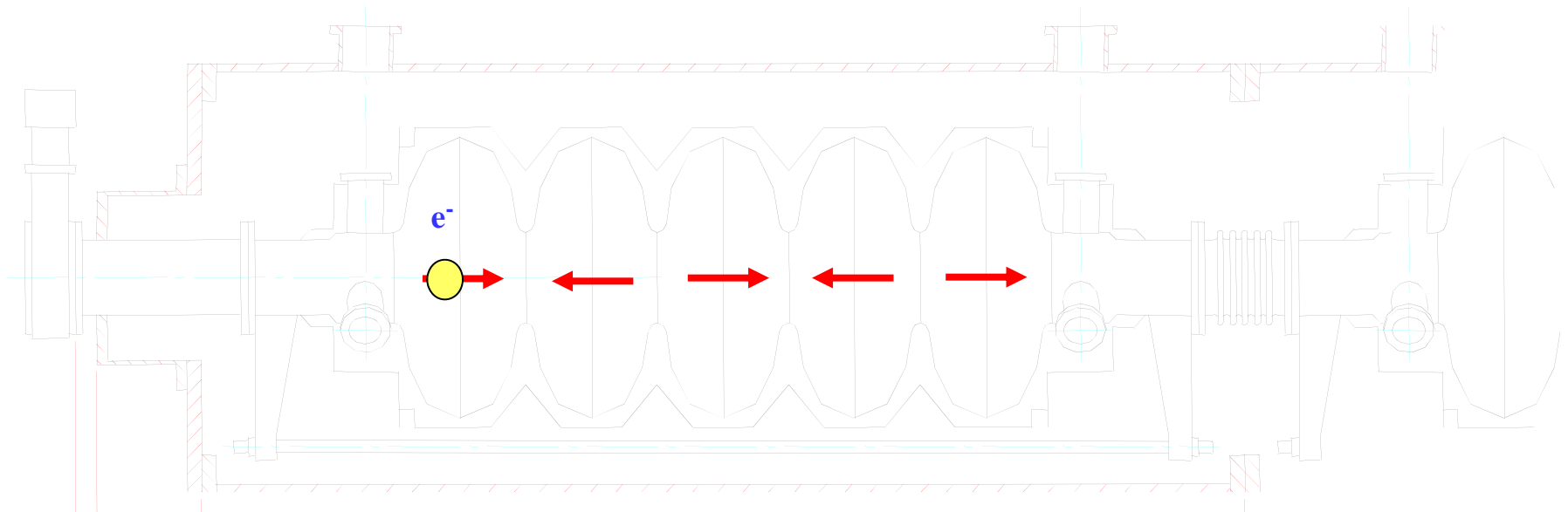
# Accelerazione RF



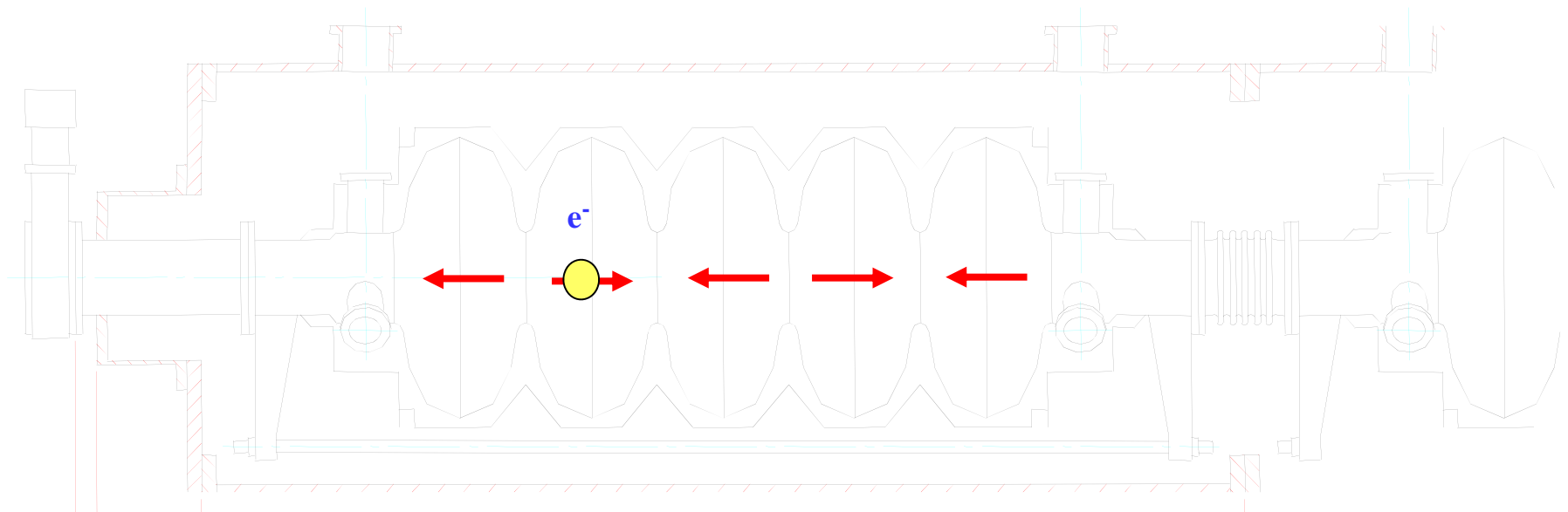
# Accelerazione RF



# Accelerazione RF

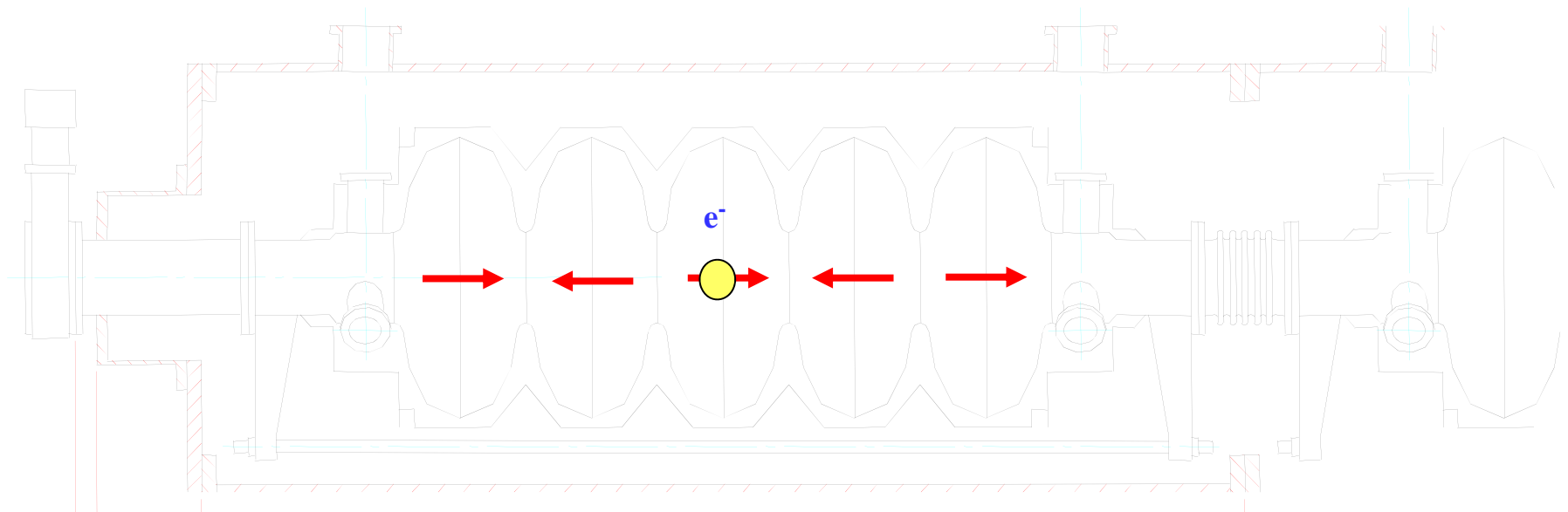


# Accelerazione RF

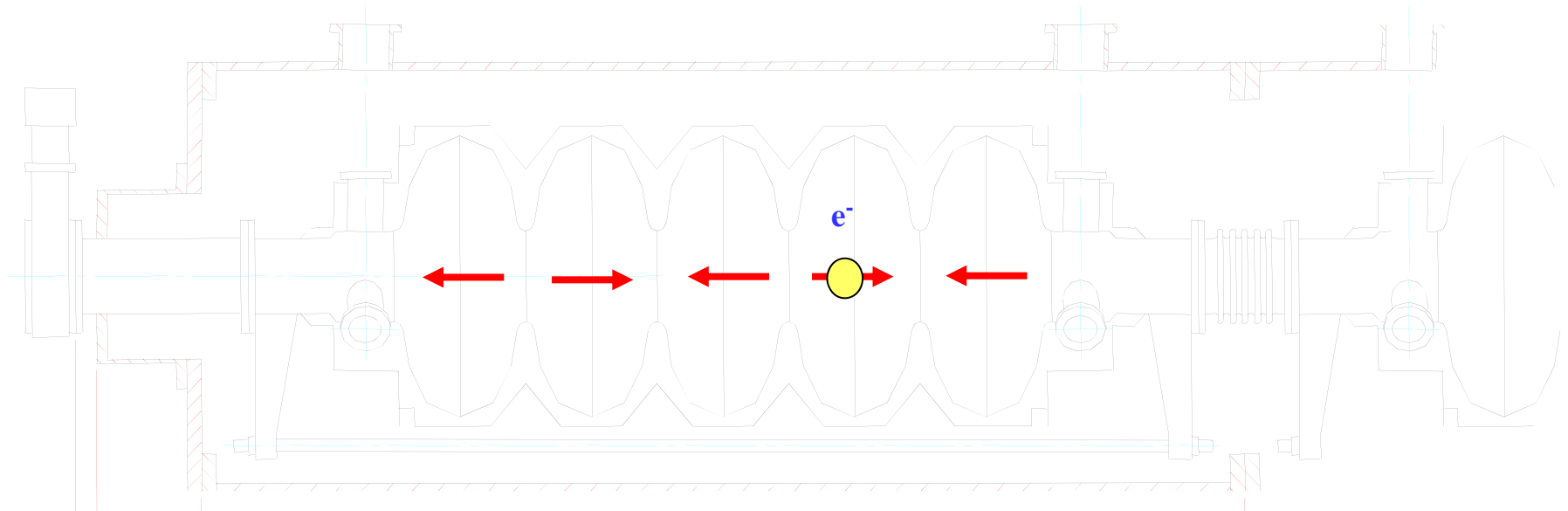




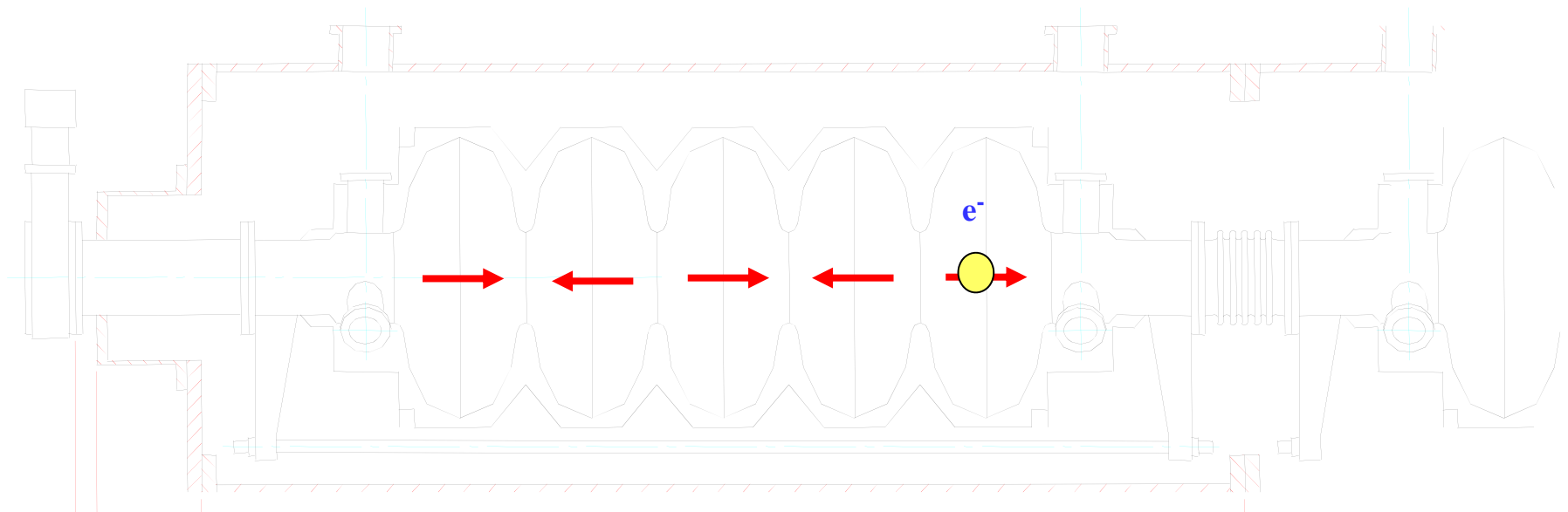
# Accelerazione RF



# Accelerazione RF



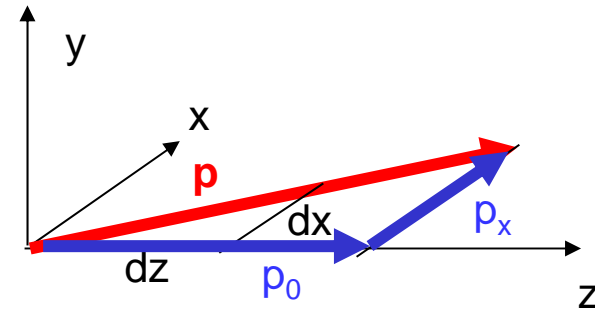
# Accelerazione RF



# Cos'è un fascio di particelle cariche

- Chiamiamo fascio un insieme di particelle cariche con un moto coerente, ovvero con momento non molto diverso da  $\mathbf{p}_0$ ;
- il versore  $\mathbf{z}$  corrisponde alla direzione del moto
- In approssimazione parassiale si possono confondere gli angoli con le loro tangenti.

$$\vec{p} \approx p_0 \hat{z}$$



$$\frac{p_x}{p_0} \approx \frac{dx}{dz} \quad v \approx \frac{p_0}{m\gamma c}$$

# Equazioni del moto parassiali

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Utilizzando  $\frac{p_x}{p_0} \approx \frac{dx}{dz}$  e  $dz = \beta c dt$  Diviene per la parte magnetica

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\beta c \hat{z} \times \vec{B})$$

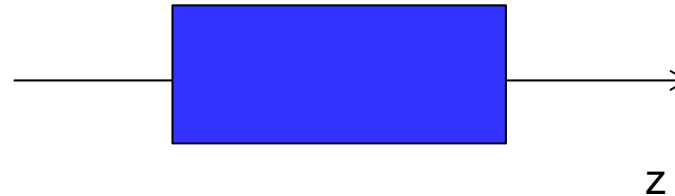
$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{eB_y}{p_0} \\ \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{eB_x}{p_0} \end{cases}$$

# Lenti magnetiche

Le lenti magnetiche utilizzate per focalizzare i fasci possono in molti casi essere considerate avere le sole componenti  $B_z$  e  $B_y$ .  
Riscrivendo quindi le equazioni del moto utilizzando la rigidità magnetica  $B\rho$

$$\begin{cases} x'' = -\frac{B_y}{B\rho} \\ y'' = \frac{B_x}{B\rho} \end{cases}$$

Nella zona in cui passa il fascio (trascurabile) non ci sono altre correnti



$$\text{rot}\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = -\text{grad}\Phi$$

Dove  $\Phi$  è un potenziale magnetico (definito solo nell'apertura per il fascio) che deve soddisfare Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Che in due dimensioni è soddisfatta da  $f(x+iy)$  che sviluppata analiticamente dà lo sviluppo in multipoli

# Lenti magnetiche: sviluppo in multipoli

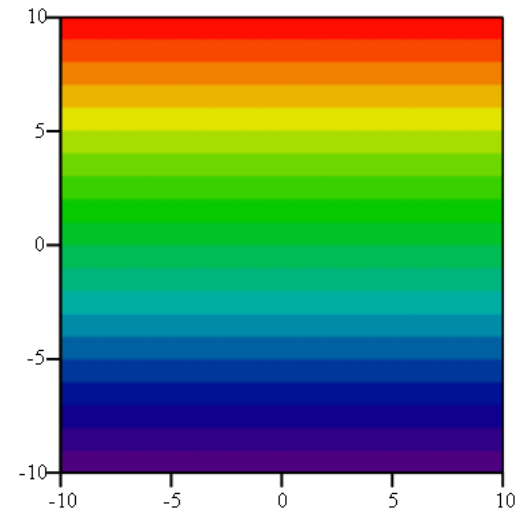
Partendo quindi da uno sviluppo analitico

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \quad \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Re}(x + iy)^n + b_n \operatorname{Im}(x + iy)^n)$$

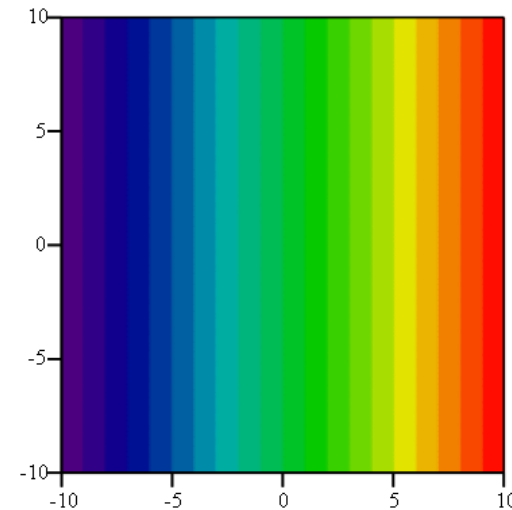
Sia la parte reale che quella immaginaria di  $f(x+iy)$  soddisfano l'equazione di Laplace, e quindi ho per ogni ordine due coefficienti, detti del regolare e skew per il 2n-polo

View the function in a contour plot:

n=1 dipolo



Freg



Fskew

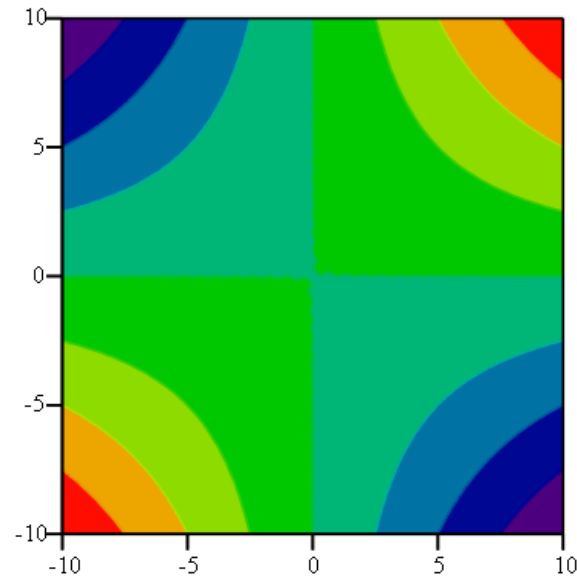
# Lenti magnetiche: sviluppo in multipoli

Partendo quindi da uno sviluppo analitico

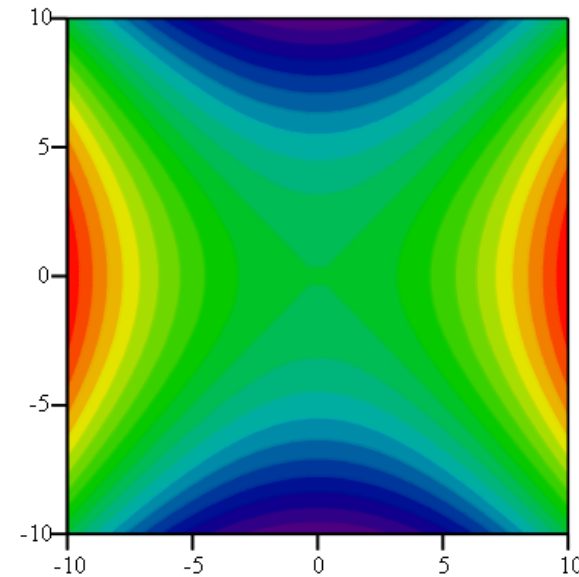
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \quad \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Re}(x + iy)^n + b_n \operatorname{Im}(x + iy)^n)$$

Sia la parte reale che quella immaginaria di  $f(x+iy)$  soddisfano l'equazione di Laplace, e quindi ho per ogni ordine due coefficienti, detti del regolare e skew per il 2n-polo

n=2 quadrupolo



Freg



Fskew



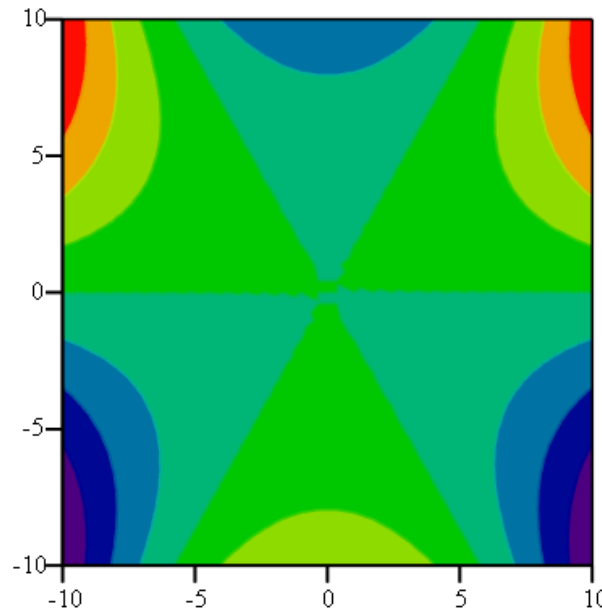
# Lenti magnetiche: sviluppo in multipoli

Partendo quindi da uno sviluppo analitico

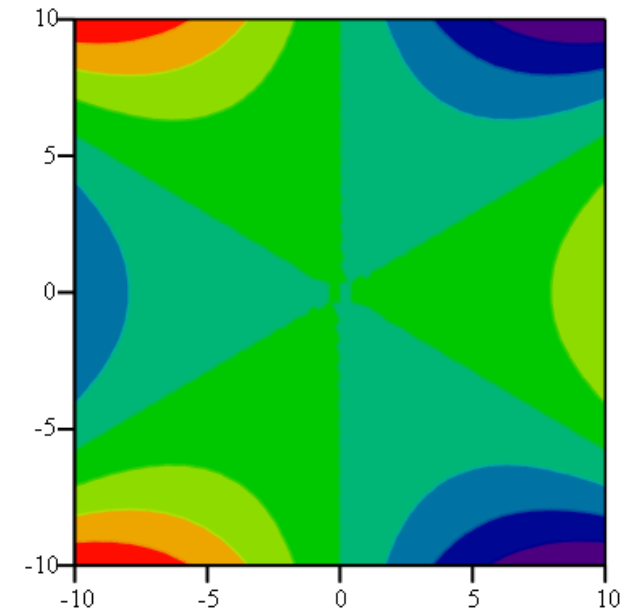
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \quad \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Re}(x + iy)^n + b_n \operatorname{Im}(x + iy)^n)$$

Sia la parte reale che quella immaginaria di  $f(x+iy)$  soddisfano l'equazione di Laplace, e quindi ho per ogni ordine due coefficienti, detti del regolare e skew per il  $2n$ -polo

$n=3$  sestupolo



Freg



Fskew

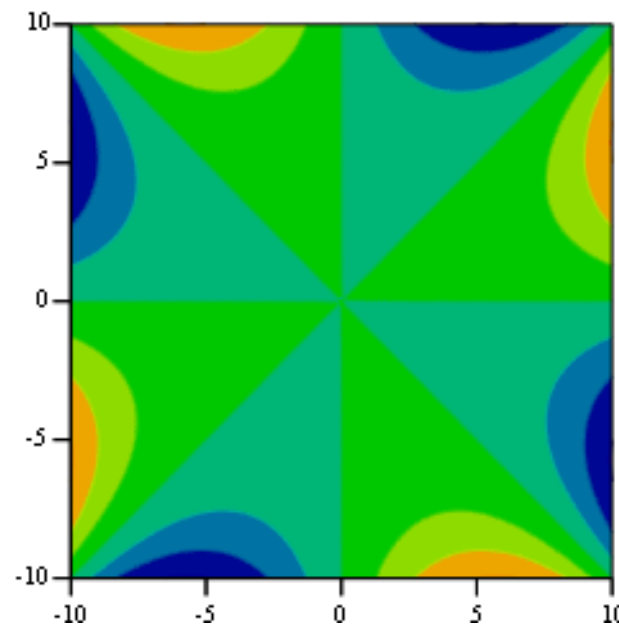
# Lenti magnetiche: sviluppo in multipoli

Partendo quindi da uno sviluppo analitico

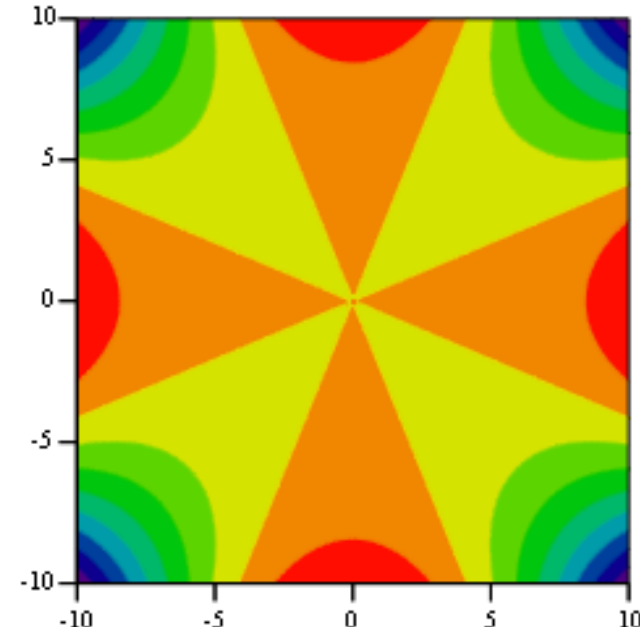
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \quad \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{Re}(x + iy)^n + b_n \operatorname{Im}(x + iy)^n)$$

Sia la parte reale che quella immaginaria di  $f(x+iy)$  soddisfano l'equazione di Laplace, e quindi ho per ogni ordine due coefficienti, detti del regolare e skew per il  $2n$ -polo

$n=4$  ottupolo



F

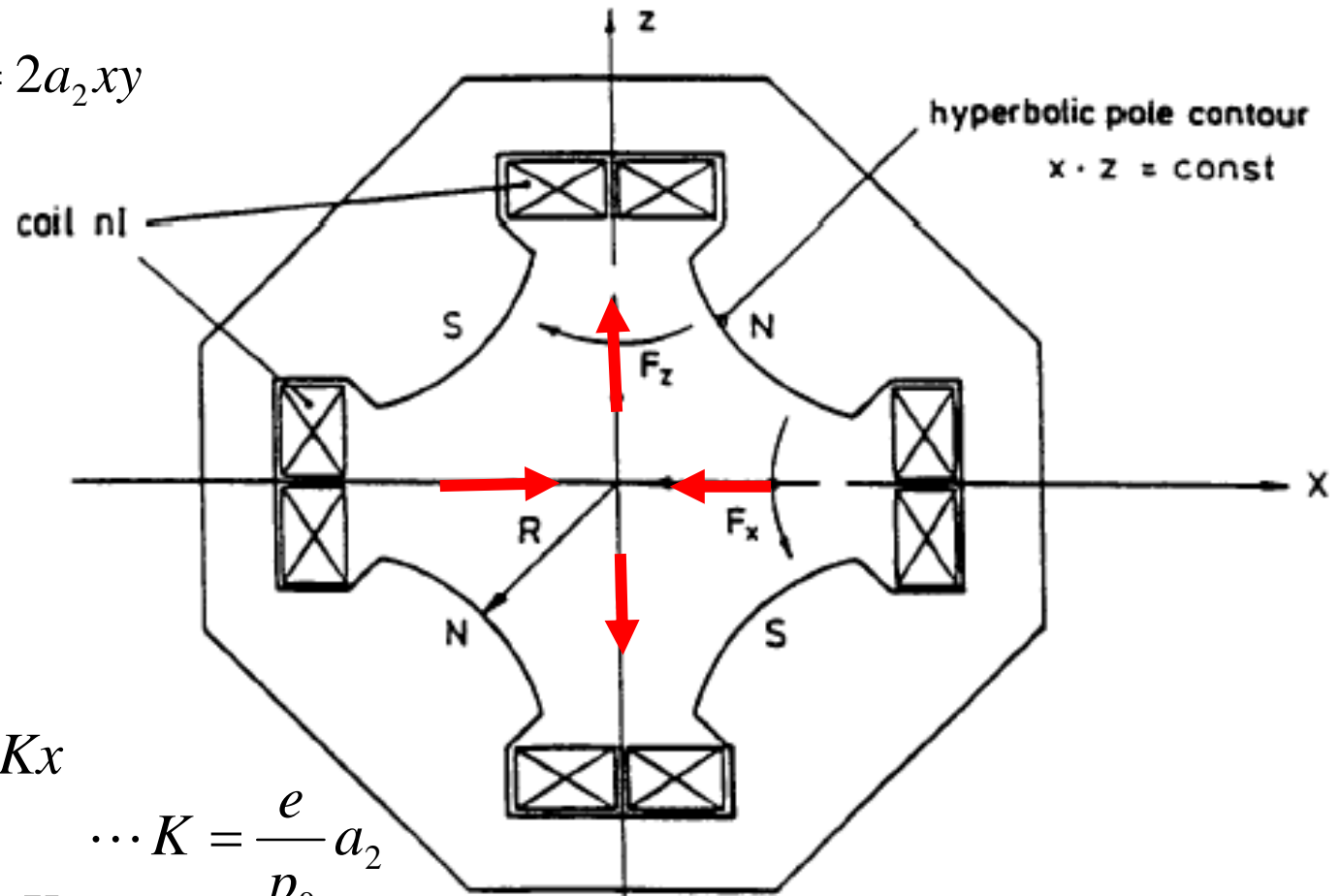


F

# Focalizzazione lineare: quadrupolo regolare

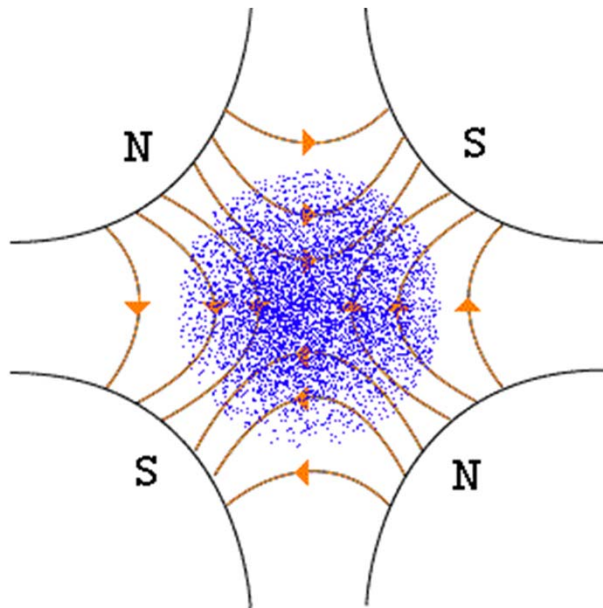
In particolare per il quadrupolo,  $n=2$

$$\Phi(x, y) = a_2 \operatorname{Im}(x + iy)^2 = 2a_2 xy$$



$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{eB_y}{p_0} = \frac{e}{p_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Kx \\ \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{eB_y}{p_0} = -\frac{e}{p_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -Ky \end{cases} \quad \dots K = \frac{e}{p_0} a_2$$

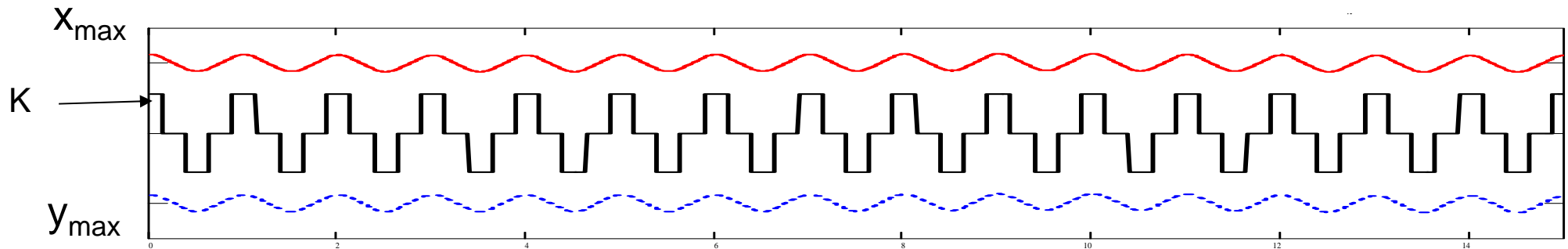
# Gradiente alternato



- Con quadrupoli regolari di polarità alternata abbiamo equazioni lineari disaccoppiate
- Non è possibile avere  $K > 0$  ovunque in  $x$  ed  $y$  (oscillatore armonico)
- In molte condizioni l'effetto di una successione di lenti focalizzanti e defocalizzanti è focalizzante
- Il trasporto del fascio avviene secondo le soluzioni stabili dell'equazione di Hill:

$$x'' + [K(s)]x = 0$$

$$y'' + [-K(s)]y = 0$$



# Matrici soluzione di un sistema lineare

- Nei sistemi dinamici (sistemi regolati da equazioni del moto nella forma)

$$\frac{d\vec{x}}{ds} - f(\vec{x}, s) = 0$$

- Se  $f$  è derivabile con derivata limitata si applica il teorema di Cauchy, esiste ed è unica la soluzione per ogni condizione iniziale. È quindi definita la funzione (o mappa) che associa alla condizione iniziale la condizione al momento  $s$

$$\vec{x}(s) = M(s, s_0, \vec{x}_0)$$

- Per la nostra equazione di Hill ponendo  $x' = p$  (considerando per ogni grado di libertà  $x$  e  $y$  posizione e divergenza) abbiamo un sistema dinamico, e quindi

$$\begin{aligned} p' &= -K(s)x \\ x' &= p \end{aligned}$$

il sistema è lineare questa trasformazione è lineare e quindi si potrà scrivere

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s = M(s, s_0) \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_0$$

# Matrici di trasferimento per un sistema lineare

- Una linea di trasporto sarà quindi totalmente caratterizzata dal prodotto delle matrici dei singoli elementi:

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s = M(s, s_3)M(s_3, s_2)M(s_2, s_1)M(s_1, s_0) \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_0$$

- La matrice di trasferimento si può costruire a partire da due soluzioni principali  $\phi_1$  ed  $\phi_2$  (tali che cioè che il Wronskiano ha determinante non nullo):

$$W(s) \equiv \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix}$$

- Per la nostra equazione di Hill  $\det W$  si conserva (verificare). Inoltre poichè ogni soluzione può essere scritta come

$$x(s) = A\phi_1(s) + B\phi_2(s)$$

- Con A e B costanti, possiamo scrivere:

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = W(s) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s = W(s)W(s_0)^{-1} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_0 \Rightarrow M(s, s_0) = W(s)W(s_0)^{-1}$$

# Matrici di trasferimento per un sistema lineare

- Questo implica fra l'altro che per un sistema di Hill (senza termine  $x'$  o di dissipazione)

$$\det M = 1$$

- Caratteristica importante e generale (teorema di Liouville).
- Nel caso particolare in cui  $K=\text{cost}$  si possono prendere le soluzioni particolari

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \cos(\sqrt{K}s) \\ \varphi_2(s) &= \sin(\sqrt{K}s)\end{aligned}$$

$$W(s) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \sqrt{K} \cos(\sqrt{K}s) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = W(s)W(0)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{bmatrix}$$

- Se  $K < 0$  (quadrupolo defocalizzante) o  $K = 0$  (spazio vuoto) si hanno rispettivamente

$$M_D = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{|K|}s) & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}s) \\ \sqrt{|K|} \sinh(\sqrt{|K|}s) & \cosh(\sqrt{|K|}s) \end{bmatrix}$$

$$M_d = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matrici di trasferimento per un sistema lineare

- È anche interessante il caso della **lente sottile**, ovvero un quadrupolo corto di forza infinita tale che  
 $s \rightarrow 0 \quad K \rightarrow \infty \quad Ks \rightarrow \frac{1}{f}$  nel caso  $K > 0$  e  $K < 0$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_D(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$



# Stabilità in un sistema periodico

- I sistemi di trasporto utilizzati sono spesso periodici (perfettamente periodici per la rivoluzione in un anello approssimativamente periodici per tratti di linea di trasporto)

$$x'' + K(s)x = 0 \quad K(s + L) = K(s)$$

- La stabilità della soluzione viene ricondotta alla stabilità periodo dopo periodo. Moltiplicando i singoli elementi sappiamo costruirci la soluzione per un periodo (matrice di Poincare) definita dalla relazione

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_{s+L} = M(s) \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s$$

per cui percorrere n periodi corrisponde all'iterata n-sima della matrice

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_{s+nL} = M(s)^n \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s$$

- Per cui il sistema è stabile secondo Ljapunov se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad \|\vec{x}(s)\| < \delta \Rightarrow \|M^n \vec{x}(s)\| < \varepsilon \quad \forall n > 0$$

- Questo dipende dal carattere limitato delle iterate degli autovalori

# Stabilità in un sistema periodico

- Diagonalizzando la matrice (nei casi possibili) avrei

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_{s+nL} = M(s)^n \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}_s$$

- Dalla condizione  $\det M=1$  so che i due autovalori hanno prodotto 1 e quindi vale

$$\lambda_2 = 1/\lambda_1 \quad o \quad \lambda_2 = e^{i\mu} \quad \lambda_1 = e^{-i\mu}$$

Caso iperbolico e caso ellittico. Il secondo è stabile ed è individuato da

$$trM = 2 \cos \mu \quad \Leftrightarrow \quad |trM| \leq 2$$

- Criterio di stabilità: se viene soddisfatto la matrice di Poincarè può essere scritta nella forma (con  $\det M=1$ ,  $trM=2 \cos \mu$  dipende da  $\mu$  e da due parametri  $\alpha$  e  $\beta$  detti parametri di Twiss)

$$M = \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1+\alpha^2}{\beta} \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix}$$

# Ellisse invariante

- La matrice di Poincarè può essere scritta come

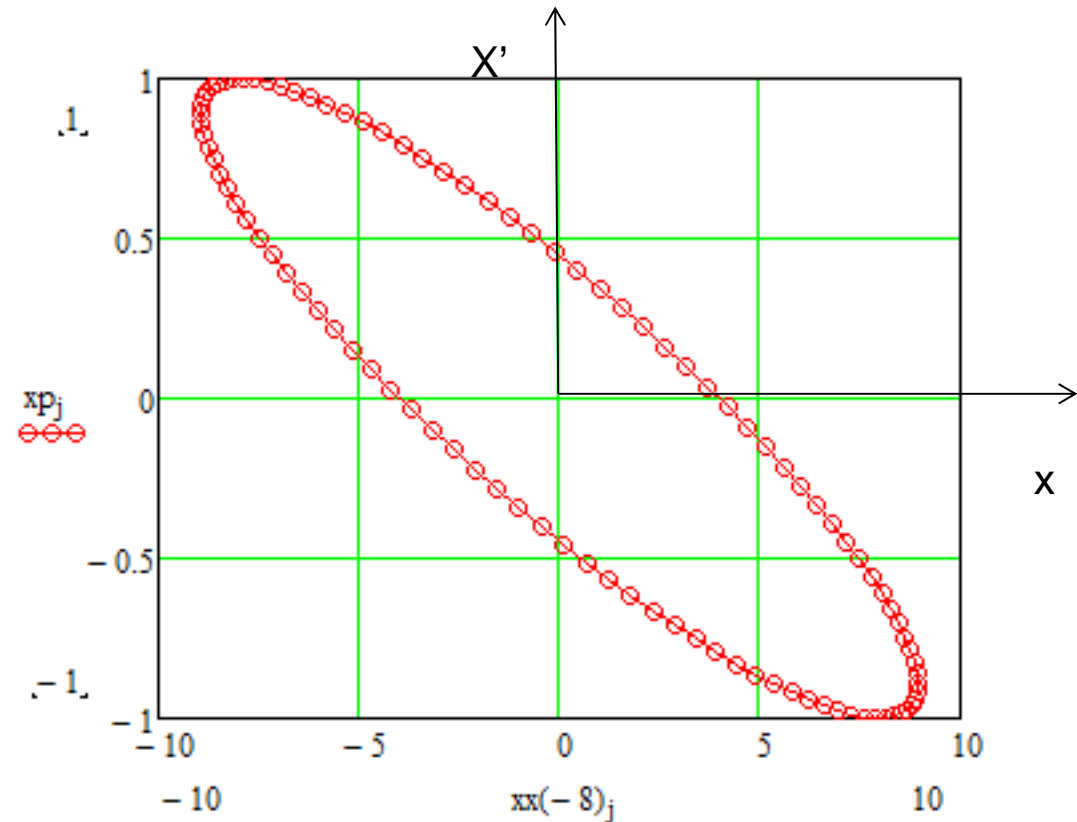
$$M = \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix} = UR(\mu)U^{-1}$$

con

$$U = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha & \frac{1}{\sqrt{\beta}} \end{bmatrix}$$

Ed invariante conservato

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} [x^2 + (\alpha x + x')^2]$$



# Dimensioni del fascio, emittanza

$$j := 0, 1, \dots, 10$$

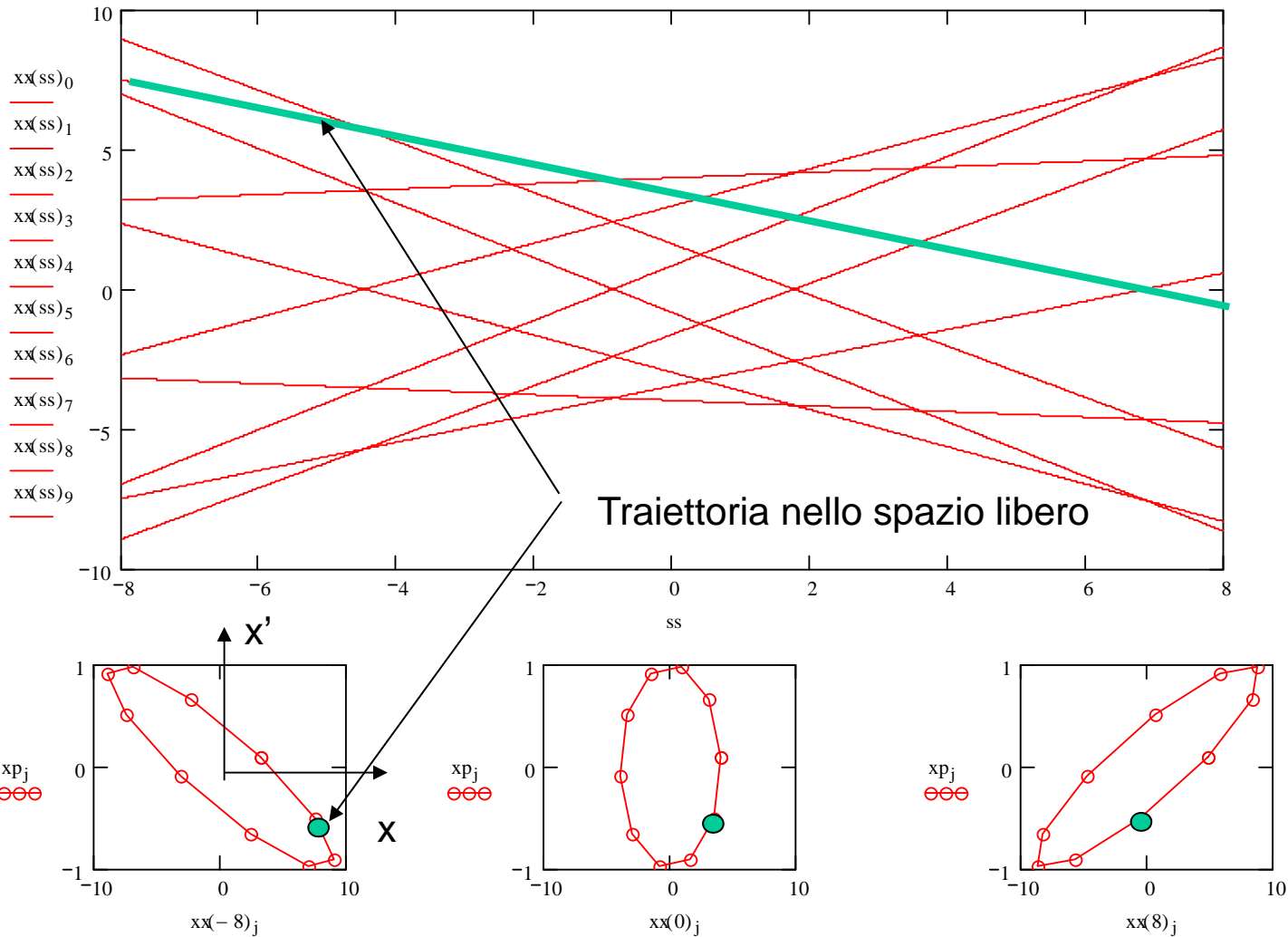
$$x_j := b \cdot \cos(\alpha_j)$$

$$b := 4$$

$$\alpha_j := 2 \frac{\pi}{10} j - 1$$

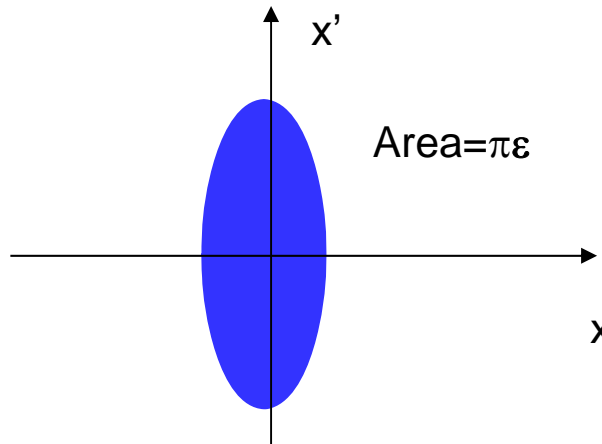
$$xp_j := \sin(\alpha_j)$$

$$xx(s) := x + xp \cdot s$$



# Dimensioni del fascio, emittanza

- L'emittanza, corrispondente all'area occupata dalla distribuzione delle particelle nel piano  $x x'$ ,
- Rappresenta la temperatura del fascio (energia corrispondente al moto incoerente)
- Una emittanza piccola corrisponde alla possibilità di focalizzare il fascio in piccole dimensioni



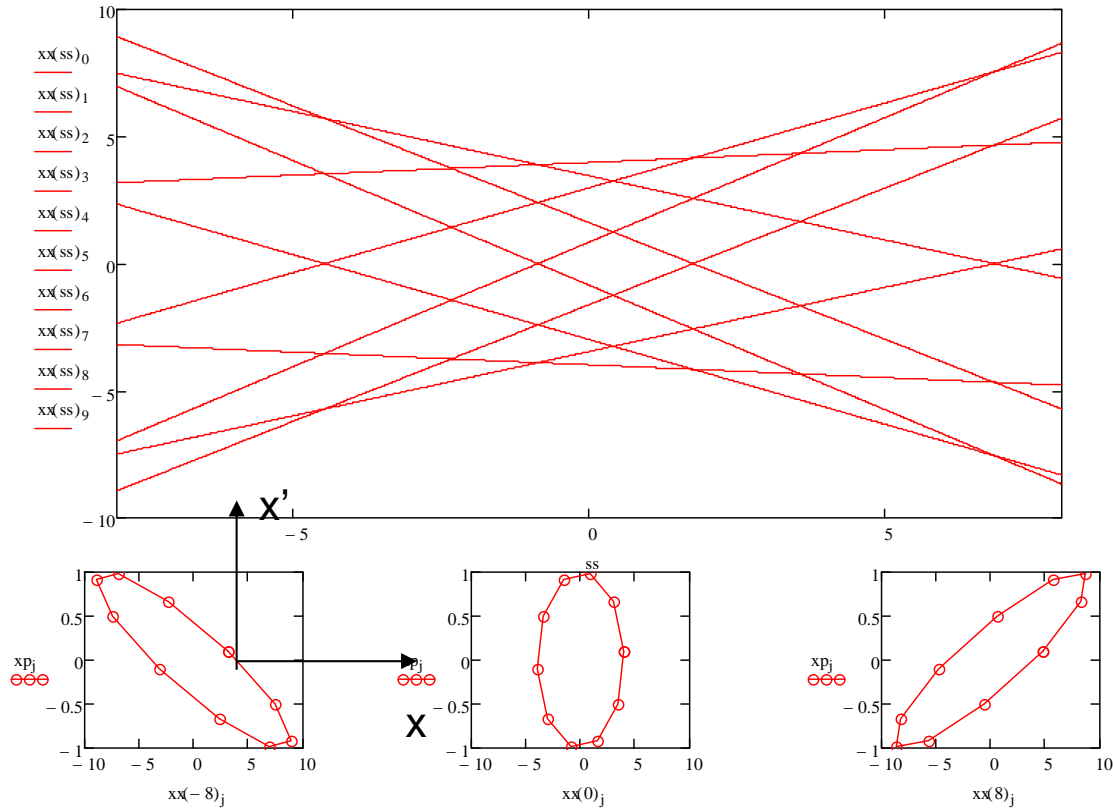
# Dimensioni del fascio, emittanza

$$j = 0, 1, \dots, 10$$

$$b := 4 \quad \alpha_j := 2 \frac{\pi}{10} j + 1$$

$$x_j := b \cdot \cos(\alpha_j) \quad xp_j := \sin(\alpha_j)$$

$$xx(s) := x + xp \cdot s$$



# Dimensioni del fascio, emittanza

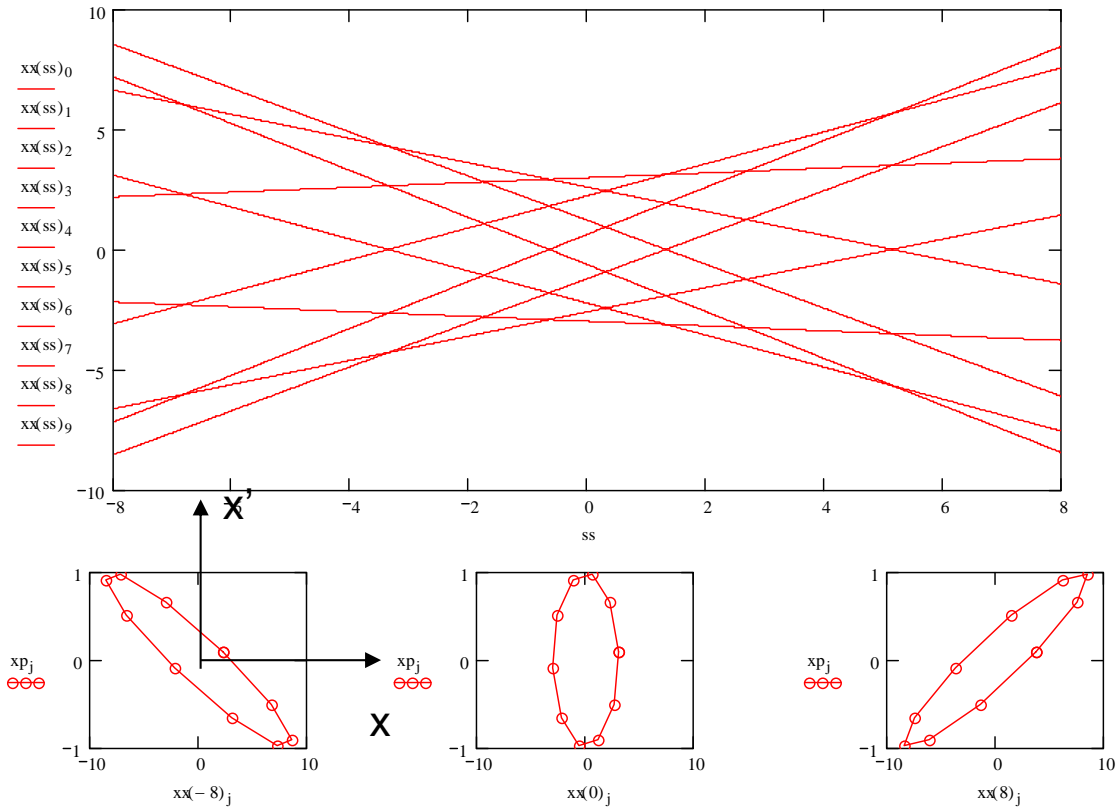
$$j = 0, 1, \dots, 10$$

$$b := 3 \quad \alpha_j := 2 \frac{\pi}{10} (j + 1)$$

$$x_j := b \cdot \cos(\alpha_j)$$

$$xp_j := \sin(\alpha_j)$$

$$xx(s) := x + xp \cdot s$$



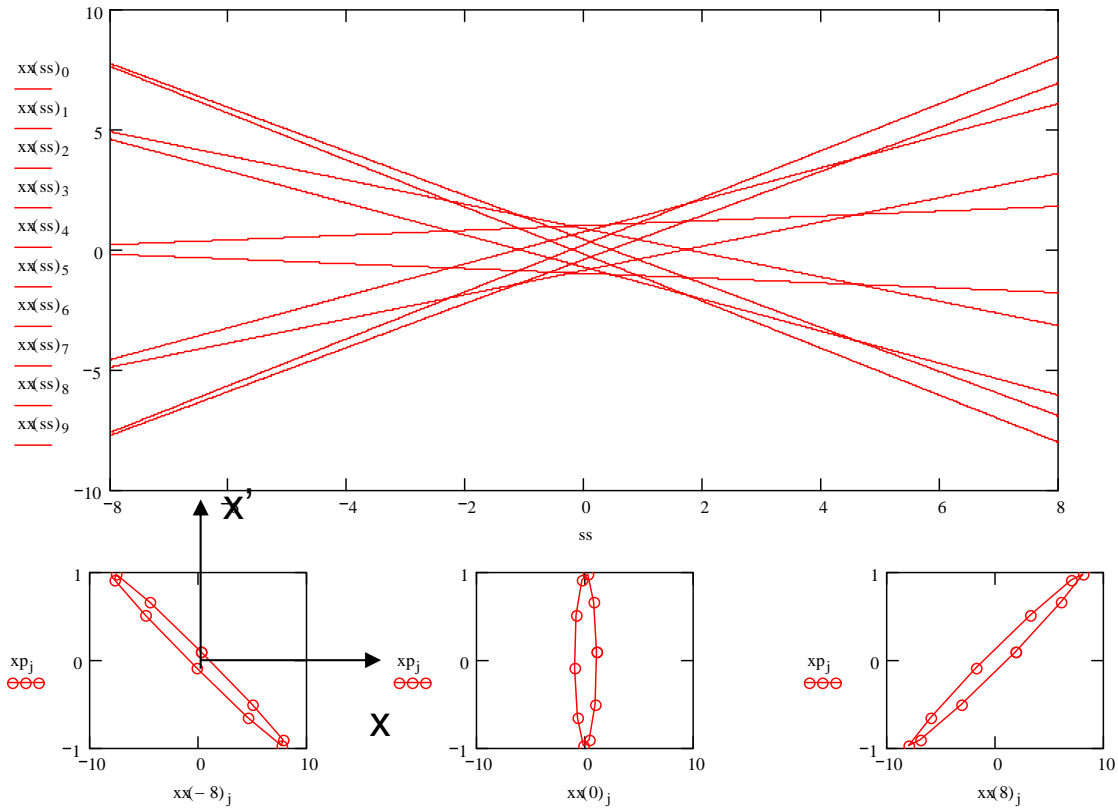
# Dimensioni del fascio, emittanza

$$j = 0, 1, \dots, 10$$

$$b := 1 \quad \alpha_j := 2 \frac{\pi}{10} j + 1$$

$$x_j := b \cdot \cos(\alpha_j) \quad xp_j := \sin(\alpha_j)$$

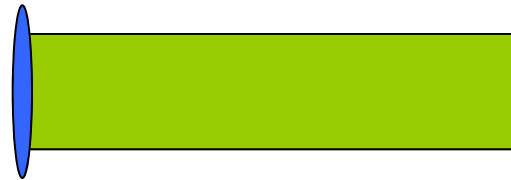
$$xx(s) := x + xp \cdot s$$





# Risonanze parametriche

- Un elemento importante è il tune  $Q = \mu/2\pi$  che può corrispondere a risonanze. Consideriamo un sistema semplificato

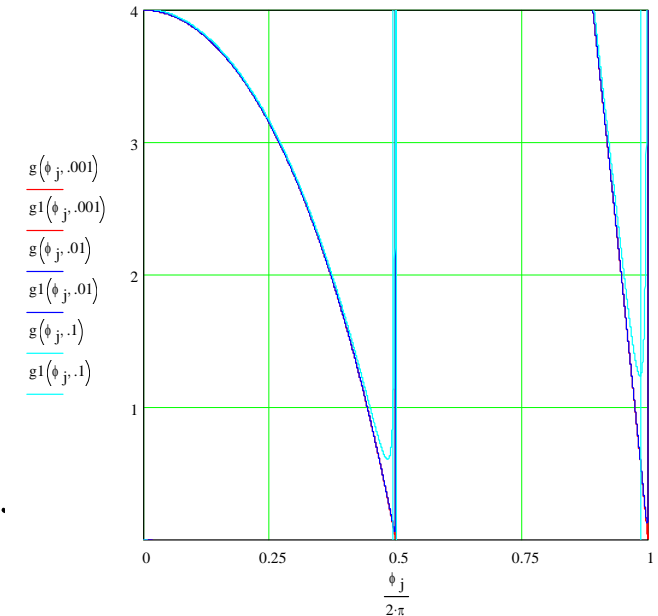


$$M = \begin{pmatrix} \cos \phi & \frac{L}{\phi} \sin \phi \\ -\frac{\phi}{L} \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

- dove  $\phi$  è l'avanzamento di fase nella parte smooth ed, è la forza della perturbazione. La condizione sulla stabilità dà

$$\cos \mu = \frac{1}{2} \text{tr} M = \cos \phi - \frac{L}{2\phi f} \sin \phi$$

- Ed abbiamo quindi un contorno di stabilità  $\pm 1 = \cos \phi - \frac{L}{2\phi f} \sin \phi \Rightarrow \frac{L}{f} = 2\phi \frac{\cos \phi \pm 1}{\sin \phi}$



# Risonanze non lineari

- Se il sistema non è perfettamente lineare (multipoli magnetici ad esempio) l'avanzamento di fase è funzione dell'ampiezza e si formano risonanze («isole») e comportamento stocastico per  $Q=n/m$  (n ed m interi)

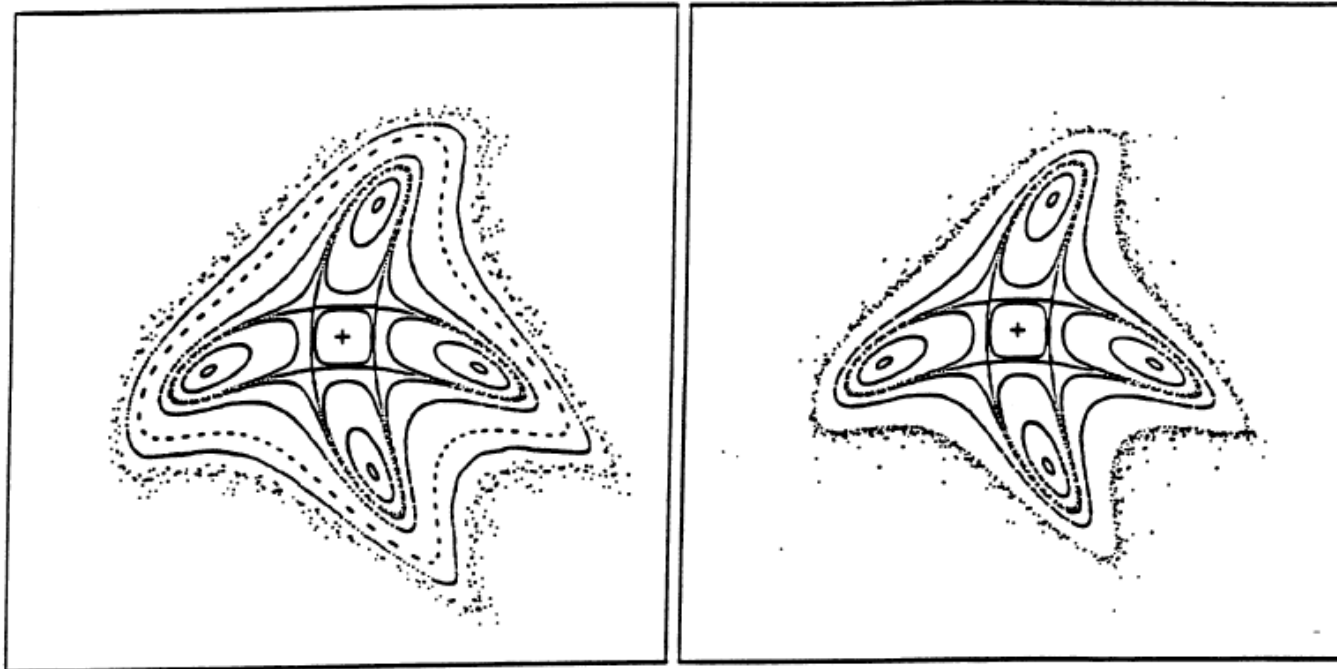


fig.7- Phase portrait of Henon's map (left) and of its resonant normal form at order 40 near the resonance  $\frac{1}{4}$  ( $\frac{\omega}{2\pi} = 0.251$ )

# Risonanze non lineari

- Se il sistema non è perfettamente lineare (multipoli magnetici ad esempio) l'avanzamento di fase è funzione dell'ampiezza e si formano risonanze («isole») e comportamento stocastico per  $Q=n/m$  (n ed m interi)

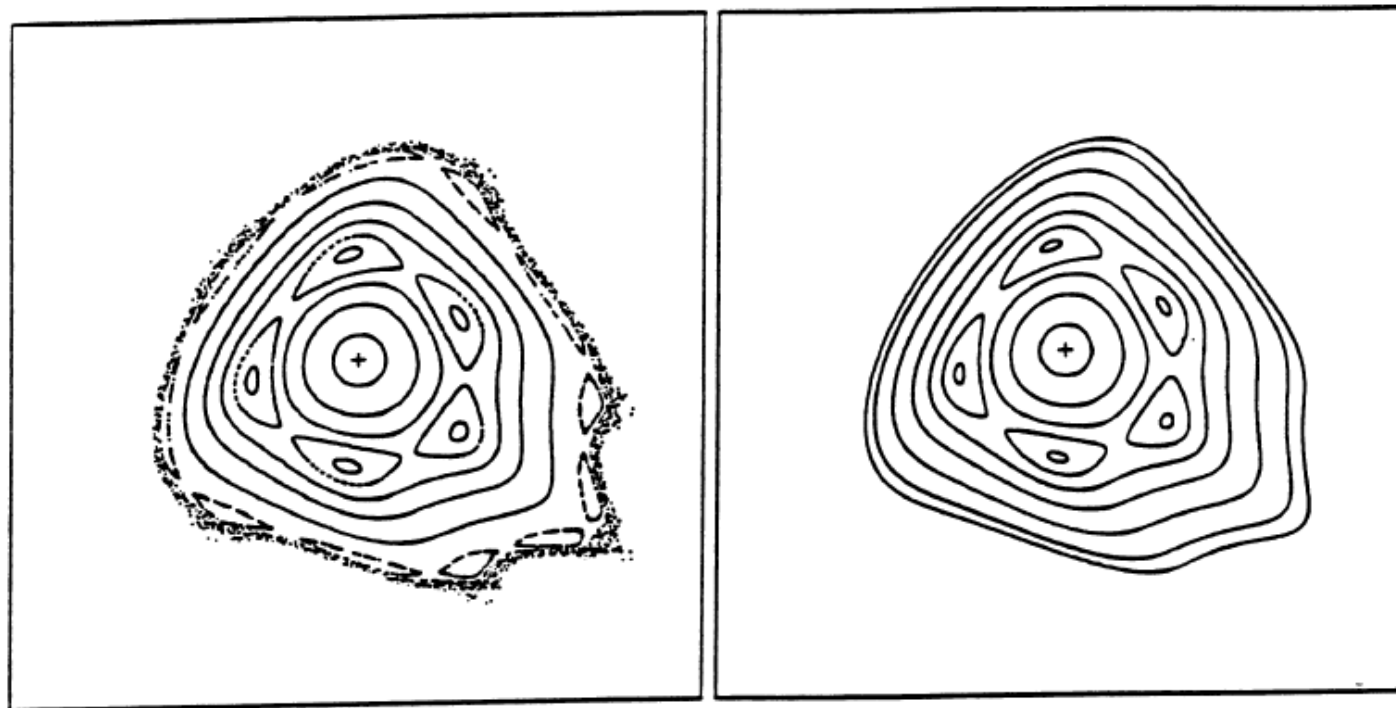


fig.11- Interpolating hamiltonian at order 7 (right) of the Henon's map (left)  
near resonance  $\frac{1}{5}$  ( $\frac{\omega}{2\pi} = 0.2050$ )

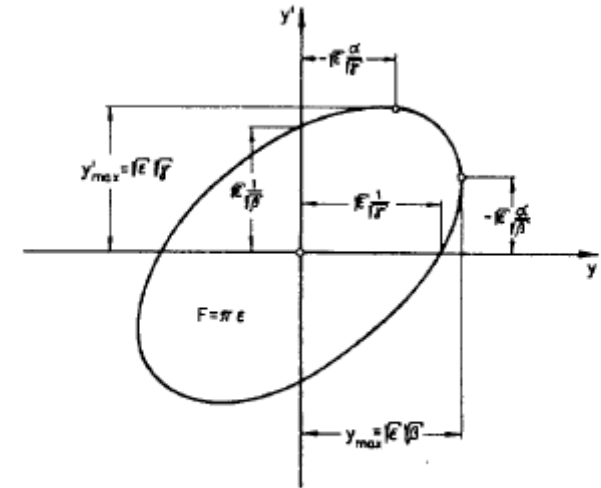
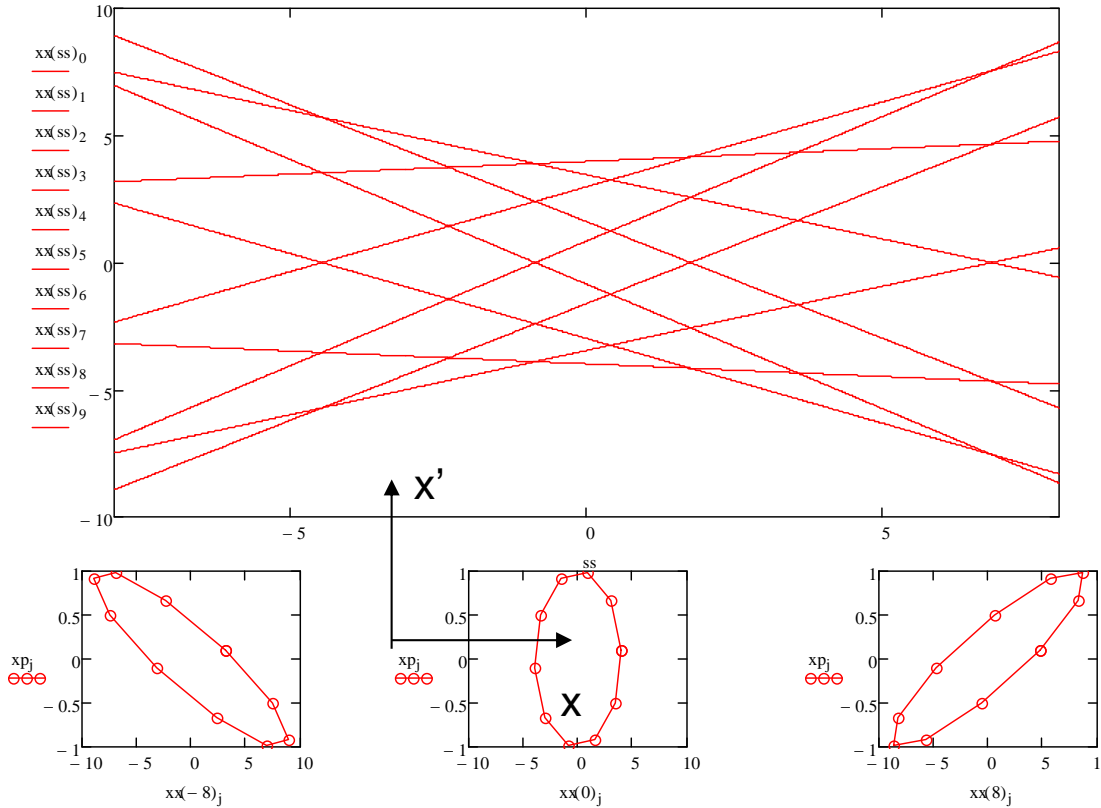
Bazzani et Al CERN SPS/89-24(AMS)

# Dimensioni del fascio, emittanza

$$j := 0, 1, \dots, 10 \quad b := 4 \quad \alpha_j := 2 \frac{\pi}{10} \cdot j + .1$$

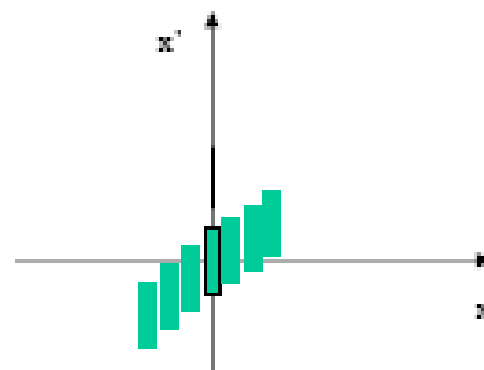
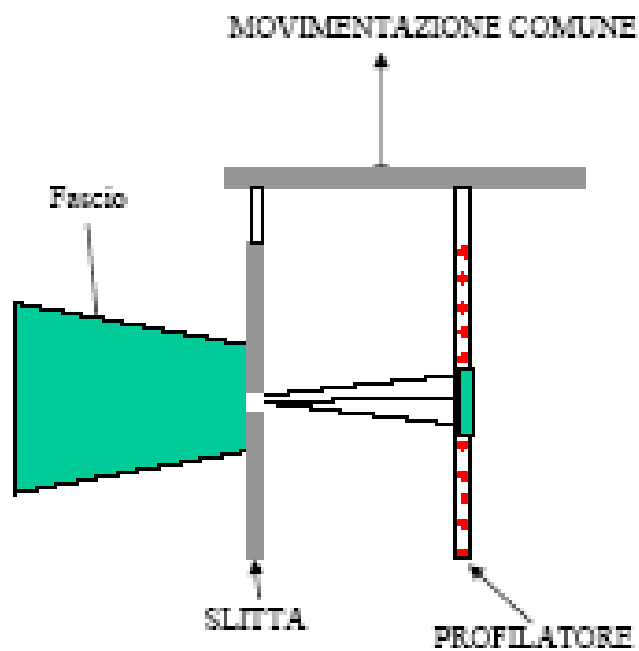
$$x_j := b \cdot \cos(\alpha_j) \quad xp_j := \sin(\alpha_j)$$

$$xx(s) := x + xp \cdot s$$



Beam ellipse in terms of amplitude function  $\beta$ .

# Misura di emittanza



# Soluzione con funzioni di Floquet

- Le soluzioni dell'equazione di Hill

$$x'' + K(s)x = 0 \quad K(s+L) = K(s)$$

Possono essere scritte nella seguente forma  $x = a(s) e^{i\psi(s)}$  dalla quale, separando parte reale e parte immaginaria, si ricavano

$$\begin{aligned} a'' + Ka - a\psi'^2 &= 0 \\ 2\psi' a' + a\psi'' &= 0 \end{aligned}$$

La seconda equazione è risolta da

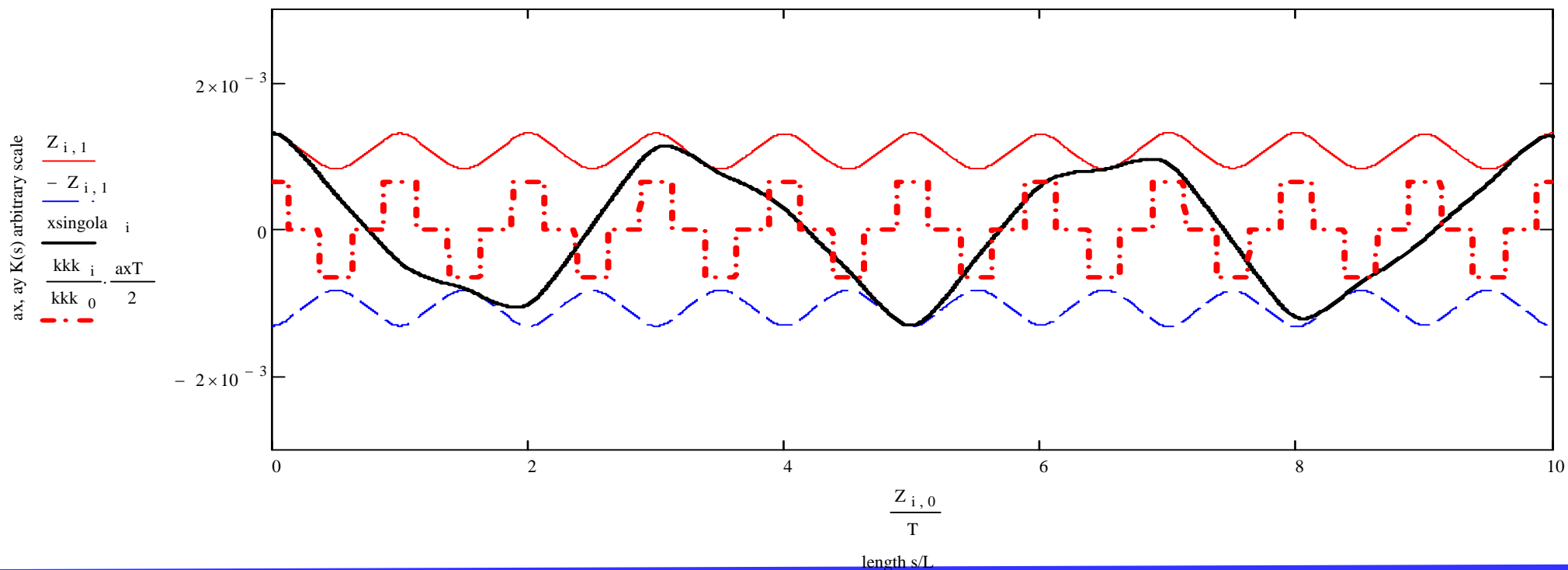
$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{\varepsilon}{a^2} \\ a'' + Ka - \frac{\varepsilon^2}{a^3} &= 0 \end{aligned}$$

Dove  $\varepsilon$  emittanza è una costante ed  $a$  involuppo del fascio. Si definisce una funzione  $\beta(s)$  detta **funzione di betatrone** con la seguente relazione

$$a(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \quad \Rightarrow \quad x(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \cos \left( \int_{s_0}^s \frac{ds}{\beta(s)} + \delta \right)$$

# Soluzione con funzioni di Floquet

$$a(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \Rightarrow x(s) = \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \cos\left(\int_{s_0}^s \frac{ds}{\beta(s)} + \delta\right)$$



# Matrici di trasferimento per un periodo

- Calcoliamo quindi la matrice di un periodo dalla soluzione di Floquet

$$\varphi_1(s) = a \cos \psi$$

$$\varphi_2(s) = a \sin \psi$$

- con la condizione  $a(s+L)=a(s)$ ,

$$\psi(s+L) = \psi(s) + \int_s^{s+L} \frac{dt}{\beta(t)} a(s) = \psi(s) + \mu$$

- otteniamo

$$M(s) = W(s)W(0)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \mu - aa' \sin \mu & a^2 \sin \mu \\ -\left(\frac{1}{a^2} + a'^2\right) \sin \mu & \cos \mu + aa' \sin \mu \end{bmatrix}$$

- Da confrontarsi con la nostra matrice in forma normale (invariante di Courant.Snyder)

$$M = \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix}$$

- Con  $a^2 = \beta \quad aa' = -\alpha$  Una volta calcolata la matrice di un periodo si possono calcolare i parametri di Twiss della soluzione periodica



# Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron<sup>1, 2</sup>

E. D. Courant and H. S. Snyder

*Brookhaven National Laboratory, Upton, New York*

Received July 15, 1957

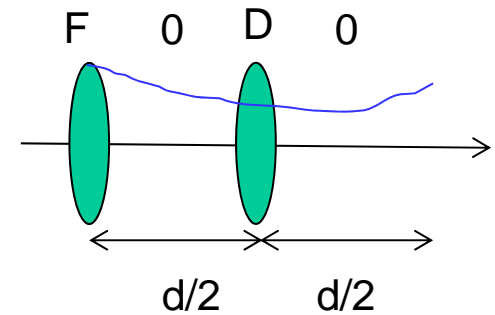
The equations of motion of the particles in a synchrotron in which the field gradient index

$$n = -(r/B) \partial B / \partial r$$

varies along the equilibrium orbit are examined on the basis of the linear approximation. It is shown that if  $n$  alternates rapidly between large positive and large negative values, the stability of both radial and vertical oscillations can be greatly increased compared to conventional accelerators in which  $n$  is azimuthally constant and must lie between 0 and 1. Thus aperture requirements are reduced. For practical designs, the improvement is limited by the effects of constructional errors; these lead to resonance excitation of oscillations and conse-

# Un esempio una cella FODO

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{2f} - \frac{d^2}{4f^2} & d + \frac{d^2}{4f} \\ -\frac{d}{f^2} & 1 + \frac{d}{2f} \end{bmatrix}$$



- Dal criterio di stabilità

$$\cos \mu = 1 - 2 \sin^2 \frac{\mu}{2} = 1 - \frac{d^2}{8f^2} \Rightarrow \sin \frac{\mu}{2} = \frac{d}{4f}$$

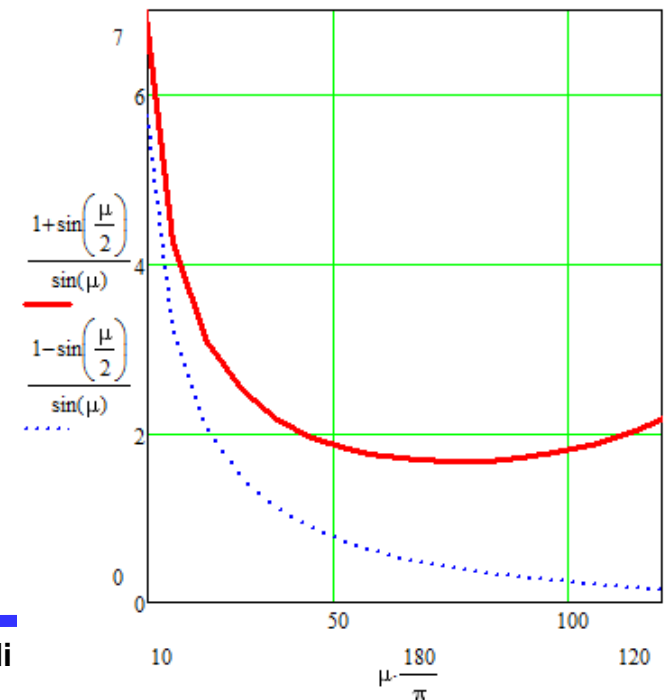
- Identificando con la matrice in forma normale

$$M = \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix}$$

Otteniamo per la funzione di betatrone

$$\beta \sin \mu = 1 + \frac{d^2}{4f^2} = d \left[ 1 + \sin \frac{\mu}{2} \right]$$

$$\beta_{\pm} = d \frac{1 \pm \sin \frac{\mu}{2}}{\sin \mu}$$



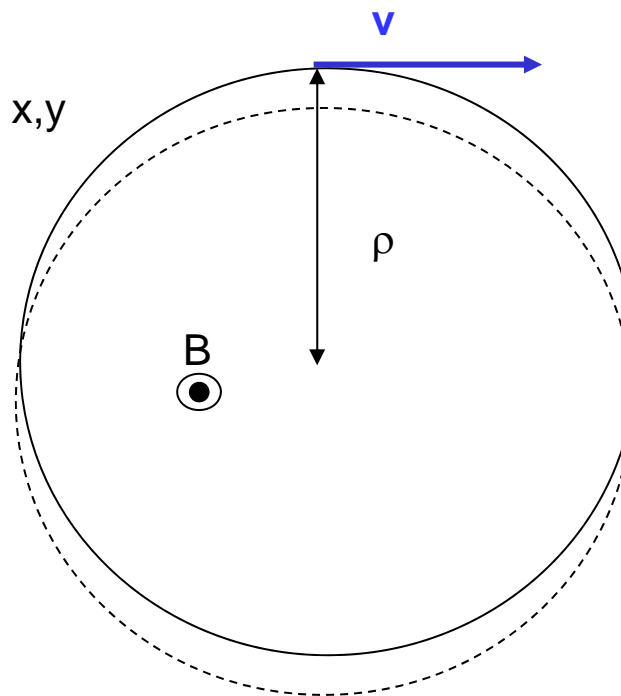
# Equazioni del moto in coordinate curvilinee

Consideriamo un sistema di coordinate in cui  $s$  è la coordinata curvilinea  $[0, 2\pi R]$ ,  $x$  e la deviazione Radiale rispetto alla traiettoria nominale,  $y$  la deviazione verticale.

In generale non avremo una semplice circonferenza ma un anello con successione di dipoli a curvatura costante e tratti dritti.

Consideriamo un dipolo, e le equazioni al primo ordine in  $x, y$  e  $dp/p$  (deviazione rispetto all'energia nominale):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{\Delta p}{p} \frac{1}{\rho} \\ \frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \end{array} \right.$$



L'equazione descrive correttamente (al primo ordine) l'effetto Focalizzante dovuto alla curvatura

$$x = x_0 \cos \frac{s}{\rho}$$

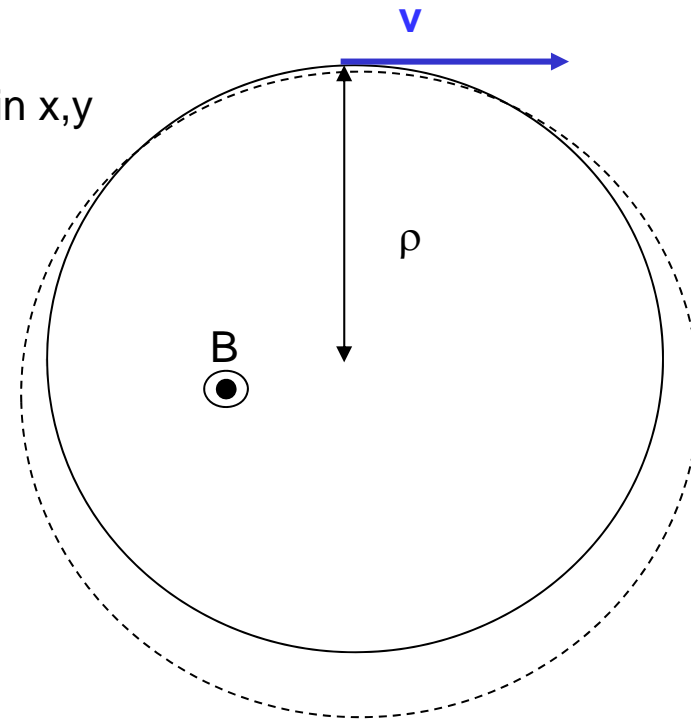
# Equazioni del moto in coordinate curvilinee

Consideriamo un sistema di coordinate in cui  $s$  è la coordinata curvilinea  $[0, 2\pi R]$ ,  $x$  e la deviazione Radiale rispetto alla traiettoria nominale,  $y$  la deviazione verticale.

In generale non avremo una semplice circonferenza ma un anello con successione di dipoli a curvatura costante e tratti dritti.

Consideriamo un dipolo, e le equazioni al primo ordine in  $x, y$  e  $dp/p$  (deviazione rispetto all'energia nominale):

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{\Delta p}{p} \frac{1}{\rho} \\ \frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \end{cases}$$



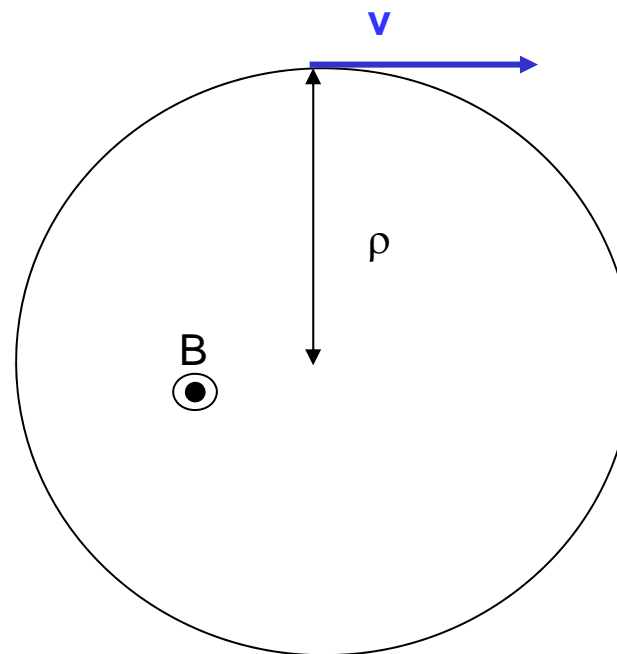
L'equazione descrive correttamente (al primo ordine) l'effetto  
Di una particella di maggiore momento e quindi raggio maggiore

$$x = \rho \frac{\Delta p}{p} \left[ 1 - \cos \frac{s}{\rho} \right]$$

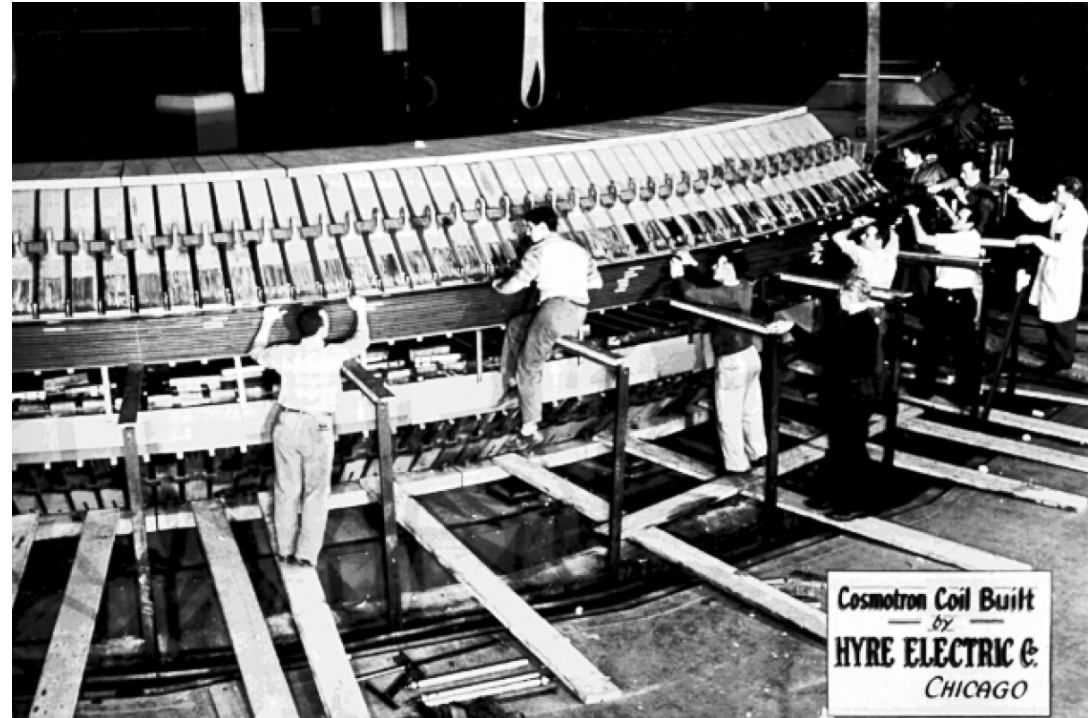
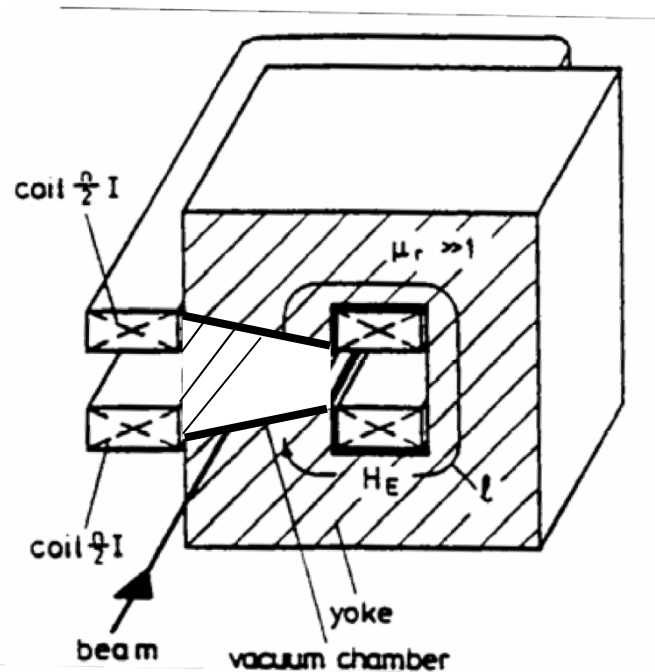
# Equazioni del moto in coordinate curvilinee

Più in generale, includendo anche tratti in cui può esserci un quadrupolo magnetico  $K$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{ds^2} + \left( \frac{1}{\rho(s)^2} - K(s) \right) x = \frac{\Delta p}{p} \frac{1}{\rho(s)} \\ \frac{d^2 y}{ds^2} + K(s) y = 0 \end{array} \right.$$



# Focalizzazione debole

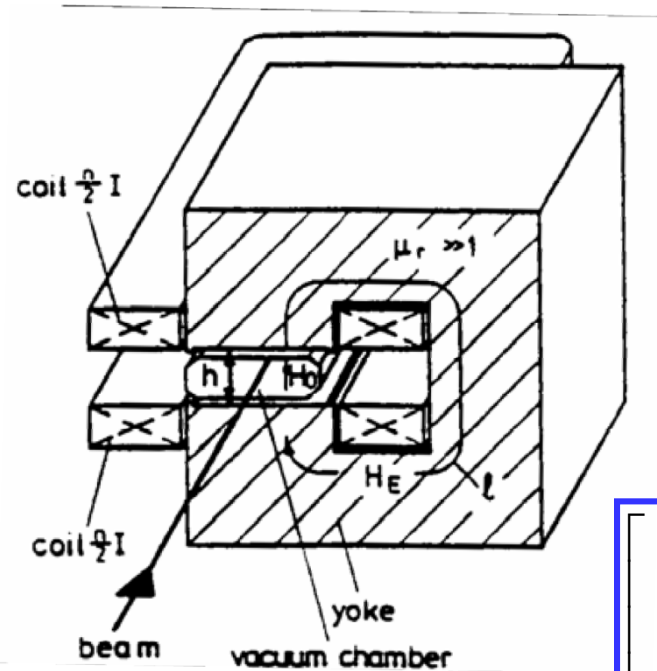


$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{x}{\rho^2} - Kx = \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{x}{2\rho^2} = 0 \\ \frac{d^2 y}{dz^2} + Ky = \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{y}{2\rho^2} = 0 \end{cases}$$

Condizione di stabilità (oscillatore armonico) in entrambi i piani.

Ma, al crescere di  $r$  la focalizzazione è sempre più debole e le dimensioni del fascio più grandi

## Matrici per un anello



- In un anello si utilizzano quindi per il piano orizzontale matrici 3 x 3 che includono l'effetto della deviazione in momento
- Per il dipolo ad esempio

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix}_s = M \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix}_0$$

- Mentre gli elementi dritti avranno 0 0 1 sulla terza colonna. Ad esempio per lo spazio di drift

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 1 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix}_0$$

# Particelle con deviazione in momento

- Con la funzione di betatrone  $\beta(s)$  (periodica  $\beta(s+L)=\beta(s)$ ) e con l'emittanza (che si conserva per moto lineare) ho le caratteristiche dell'involuppo del fascio. Ma particelle con deviazione in momento seguiranno orbite differenti nei magneti. Definisco una funzione  $D(s)$  periodica ( $D(s+L)=D(s)$ ) per descrivere questo spostamento

$$x = D(s) \frac{\Delta p}{p} + \sqrt{\varepsilon \beta(s)} \cos\left(\int_{s_0}^s \frac{ds}{\beta(s)} + \delta\right)$$

- Questa funzione, detta dispersione soddisfa

$$\frac{d^2 D}{ds^2} + \left( \frac{1}{\rho(s)^2} - K(s) \right) D = \frac{1}{\rho(s)}$$

Il valore periodico di questa funzione, detta dispersione, si ricava dalla matrice 3x3 del periodo.

$$\begin{bmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{bmatrix}_{s+L} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{bmatrix}_s$$



# Momentum compaction

- prima osservazione: in approssimazione parassiale l'aumento di lunghezza per la traiettoria di una particella compie oscillazioni in un tratto dritto è del secondo ordine

$$ds' = \sqrt{ds^2 + x'^2 ds} \approx ds \left[ 1 + \frac{x'^2}{2} \right]$$

- In un dipolo invece

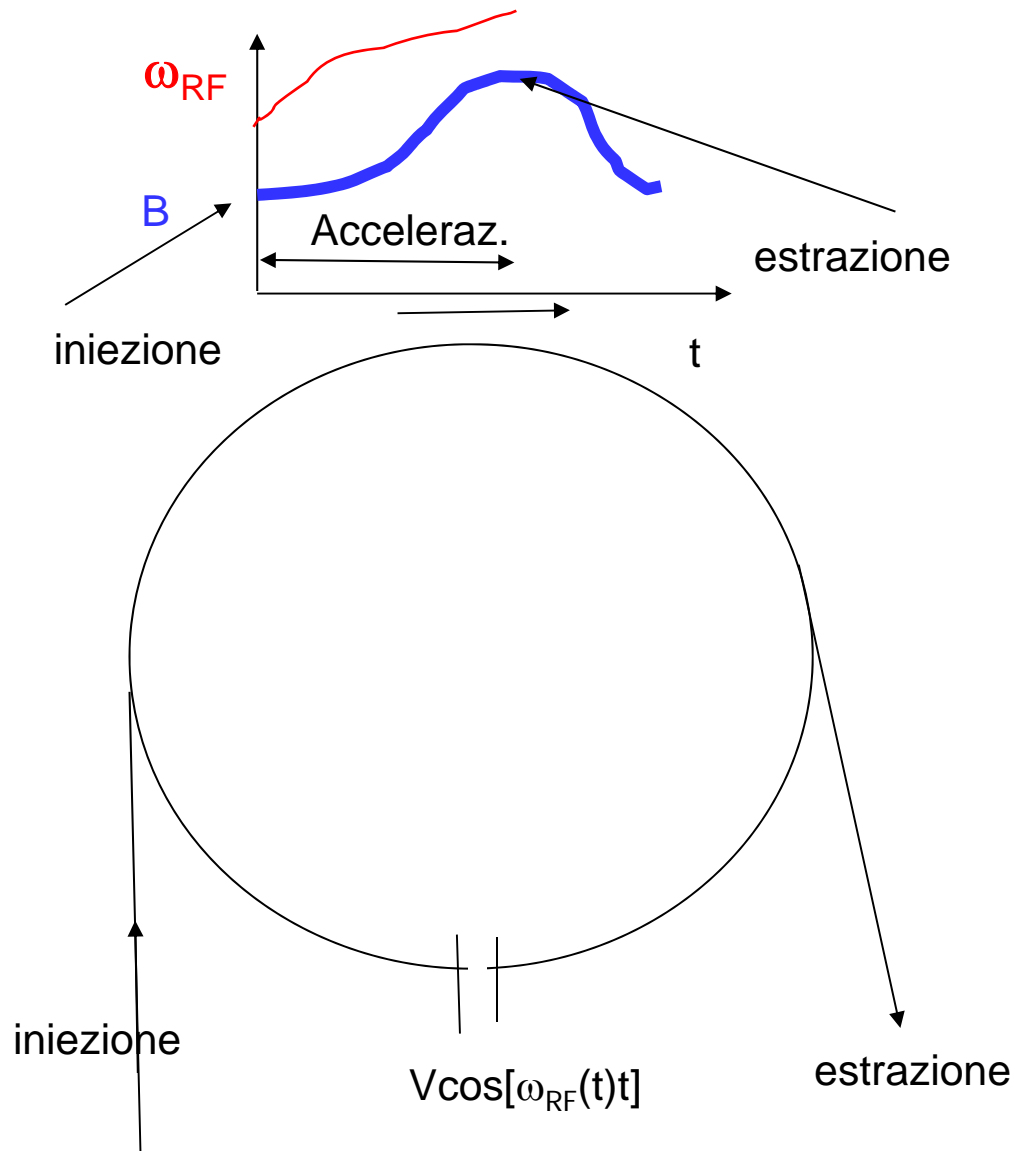
$$ds' \approx ds \left[ 1 + \frac{x}{\rho} \right]$$

È un effetto del primo ordine. Nel caso di un anello occorre quindi ben calcolare l'allungamento delle orbite al variare dell'energia. Si definisce il momentum compaction, una costante caratteristica dell'anello che determina l'allungamento dell'orbite per una deviazione di momento data

$$\frac{\Delta R}{R} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p}$$

$$\Delta s' \approx \int_0^{2\pi R} \frac{x}{\rho} ds \quad \Rightarrow \quad \alpha_p = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \frac{D ds}{\rho}$$

# Accelerazione in un sincrotrone (1/2)



- In un sincrotrone l'orbita di rif. è fissa.
- L'energia sincrona è determinata dal campo nei dipoli:

$$p_0 = eB(t)\rho$$

- La frequenza RF deve seguire la freq. di rivoluzione ( $h$  numero armonico)

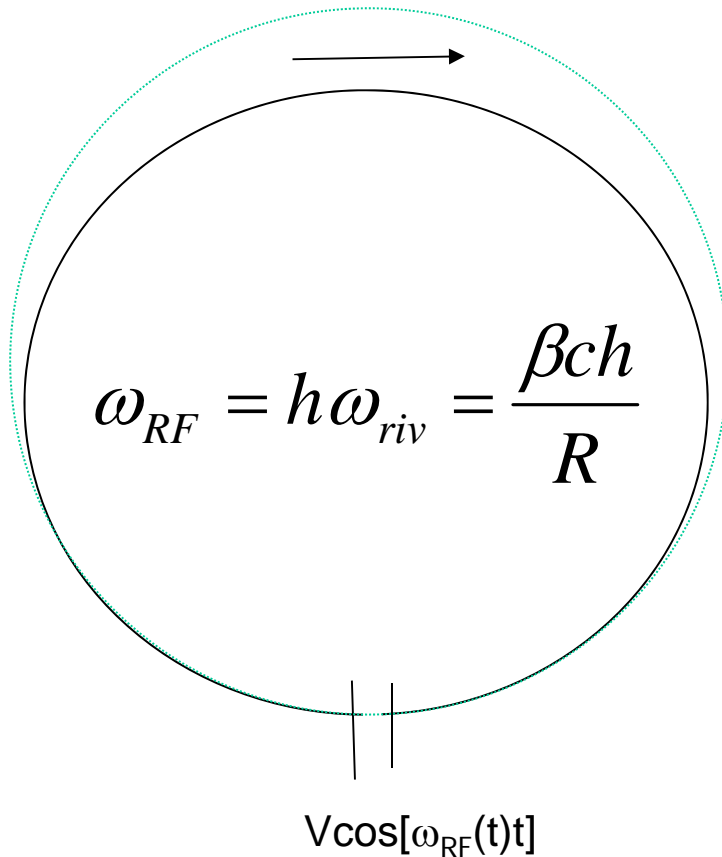
$$\omega_{RF} = h\omega_{riv} = \frac{\beta ch}{R}$$

- La tensione data dalle cavità deve essere tale che

$$\frac{dw_0}{dn} = eV \cos \phi_0$$

# Accelerazione in un sincrotrone (2/2)

$$dR/R = \alpha dp/p$$



- Per la particella generica

$$\frac{d(w - w_0)}{dn} = eV [\cos \phi - \cos \phi_0]$$

- E per la fase

$$\frac{d\phi}{dn} \approx 2\pi \left[ \frac{dR}{R} - \frac{d\beta}{\beta} \right] = 2\pi \frac{w - w_0}{\beta^2 \gamma mc^2} \left[ \alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \right]$$

Variazione lunghezza orbita  
Parametro ottico  
(dipende da  $\mathbf{p}$  o da  $\mathbf{Bp}$ )

Variazione della  
velocità

Può cambiare  
segno  
**“massa negativa”**

# Stabilità di fase

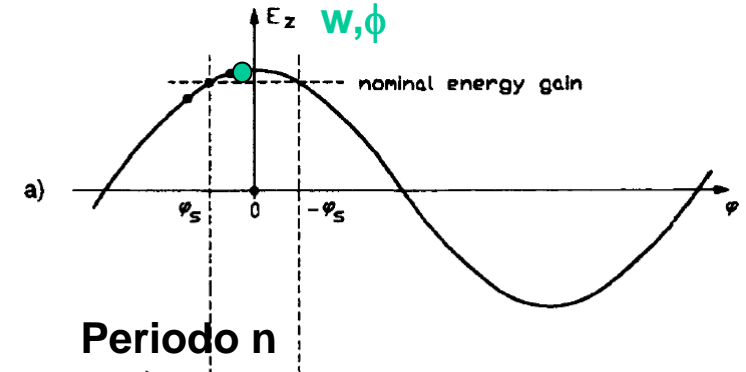
Consideriamo il caso di energia bassa (con  $\gamma$  piccolo, sotto la transizione)

La particella generica, con fase  $\phi$  ed energia  $w$ , avrà (passando nella cavità accelerante) una variazione di energia:

$$\frac{d(w - w_0)}{dn} = eV[\cos \phi - \cos \phi_0]$$

Mentre dopo un periodo arriverà con un ritardo rispetto alla particella nominale:

$$\frac{d\phi}{dn} = 2\pi \frac{w - w_0}{\beta^2 \gamma mc^2} \left[ \alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \right]$$



# Stabilità di fase

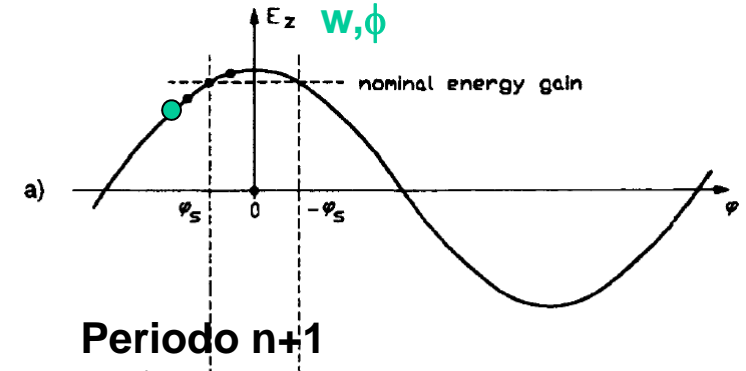
Consideriamo il caso di energia bassa (con  $\gamma$  piccolo, sotto la transizione)

La particella generica, con fase  $\phi$  ed energia  $w$ , avrà (passando nella cavità accelerante) una variazione di energia:

$$\frac{d(w - w_0)}{dn} = eV [\cos \phi - \cos \phi_0]$$

Mentre dopo un periodo arriverà con un ritardo rispetto alla particella nominale:

$$\frac{d\phi}{dn} = 2\pi \frac{w - w_0}{\beta^2 \gamma mc^2} \left[ \alpha_p - \frac{1}{\gamma^2} \right]$$



# Stabilità di fase

Consideriamo il caso di energia bassa (con  $\gamma$  piccolo, sotto la transizione)

La particella generica, con fase  $\phi$  ed energia  $w$ , avrà (passando nella cavità accelerante) una variazione di energia:

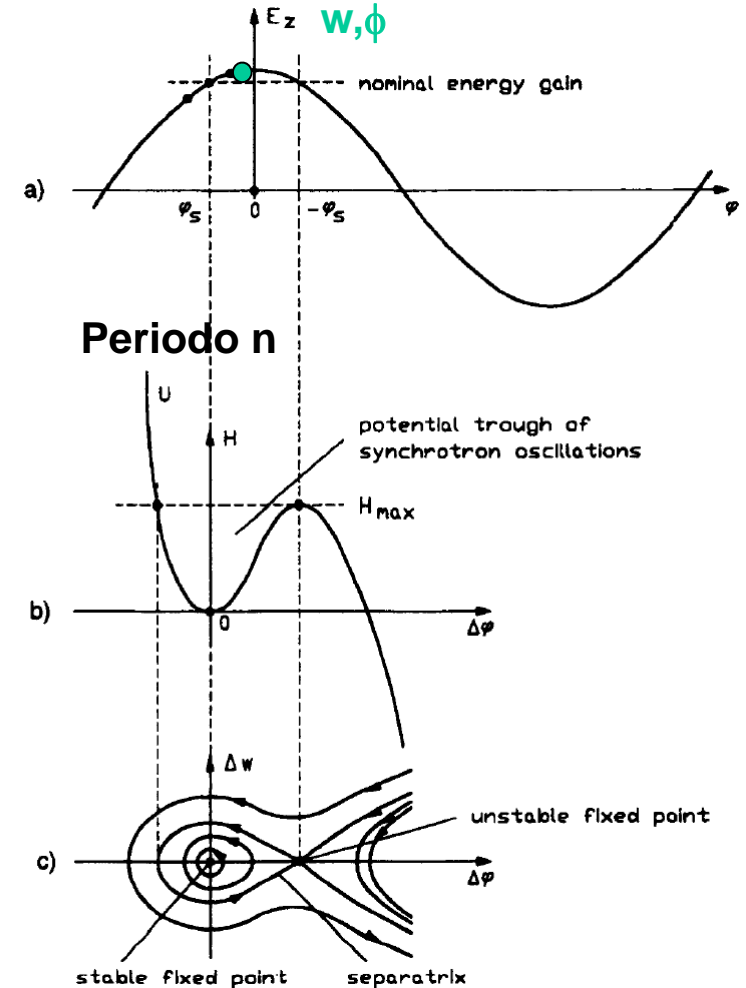
$$\frac{d(w - w_0)}{dn} = eV[\cos \phi - \cos \phi_0]$$

Mentre dopo un periodo arriverà con un ritardo rispetto alla particella nominale:

$$\frac{d\phi}{dn} = 2\pi \frac{w - w_0}{\beta^2 \gamma mc^2} \left[ \alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right]$$

L'evoluzione del sistema è riducibile all'Hamiltoniano

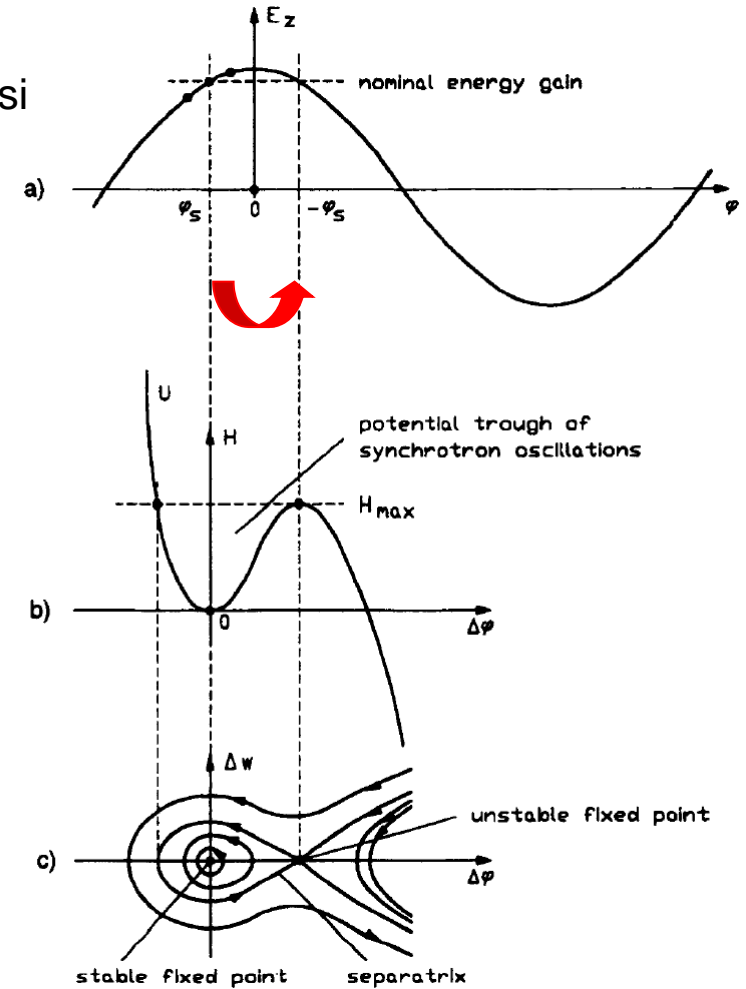
$$H(w, \phi) = \pi \frac{(w - w_0)^2}{\beta^2 \gamma mc^2} \left[ \frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right] + \underbrace{eV[\cos \phi - \cos \phi_0]}_{U(\phi)}$$



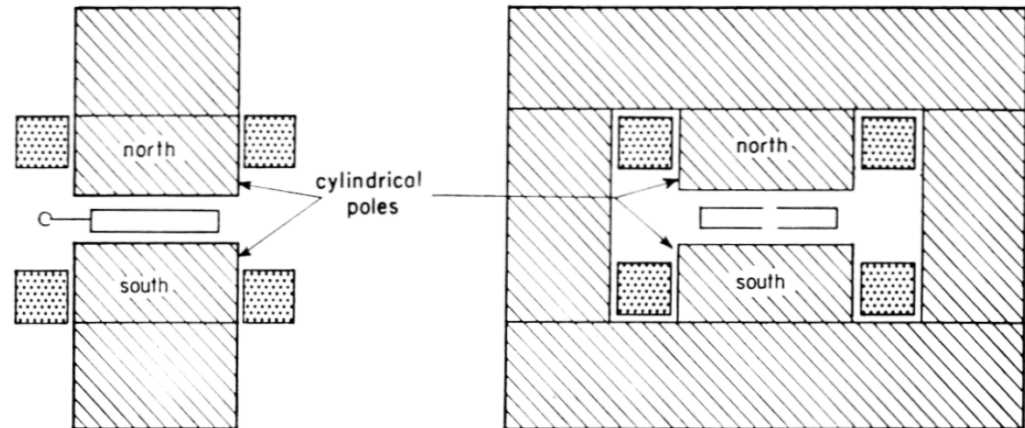
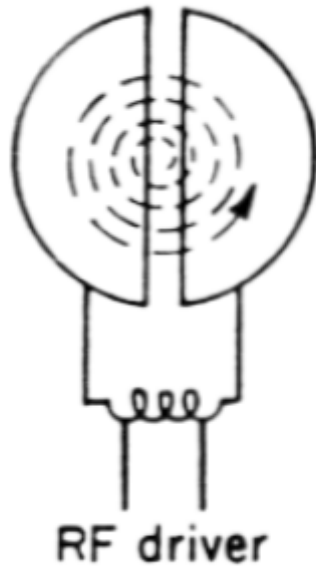
# Stabilità di fase

Quando il termine fra parentesi quadra cambia di segno le fasi Stabile ed instabile si scambiano

$$H(w, \phi) = \pi \frac{(w - w_0)^2}{\beta^2 \gamma mc^2} \left[ \frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right] + \underbrace{eV [\cos \phi - \cos \phi_0]}_{U(\phi)}$$



# Acceleratori isocroni: il ciclotrone



Il ciclotrone, fino a quando  $\gamma$  può essere approssimata a 1, è isocrono in quanto l'allungamento delle orbite compensa esattamente l'aumento di velocità

## Constant revolution frequency

$$f_{rev} = \frac{v}{2\pi\rho} = \frac{\cancel{\gamma} eB}{2\pi\cancel{\gamma} m\cancel{\gamma}} = \frac{eB}{2\pi m\gamma}$$



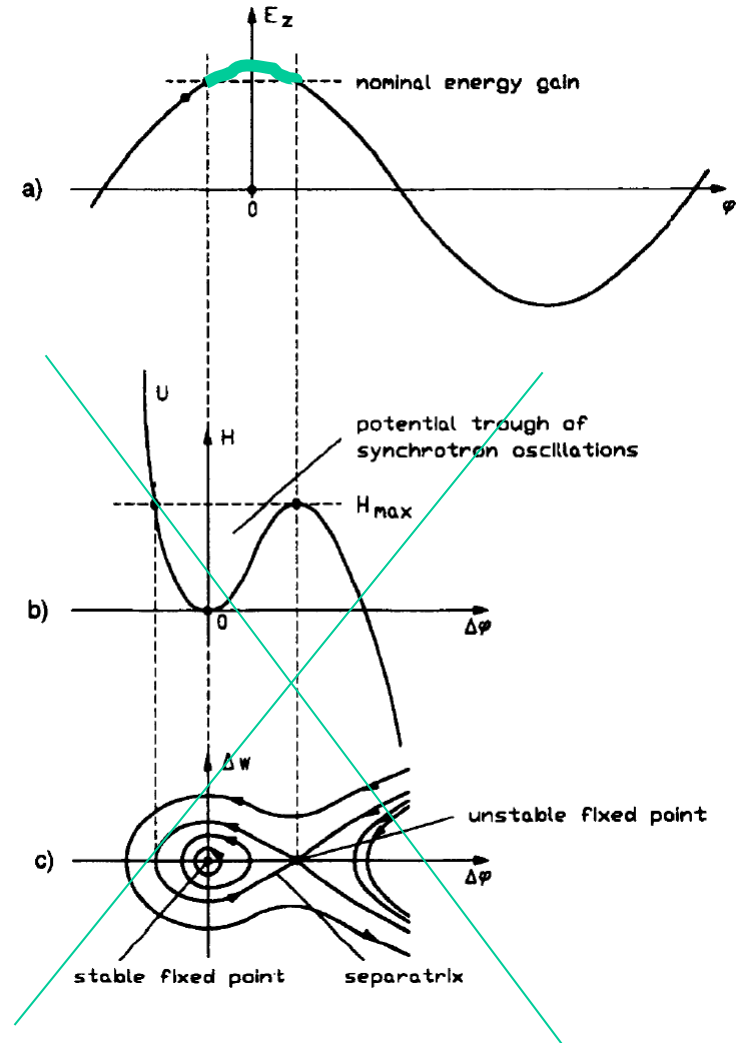
# Accelerazione isocrona

Non ci sono più oscillazioni intorno alla particella sincrona, ma tutte le particelle mantengono la fase iniziale

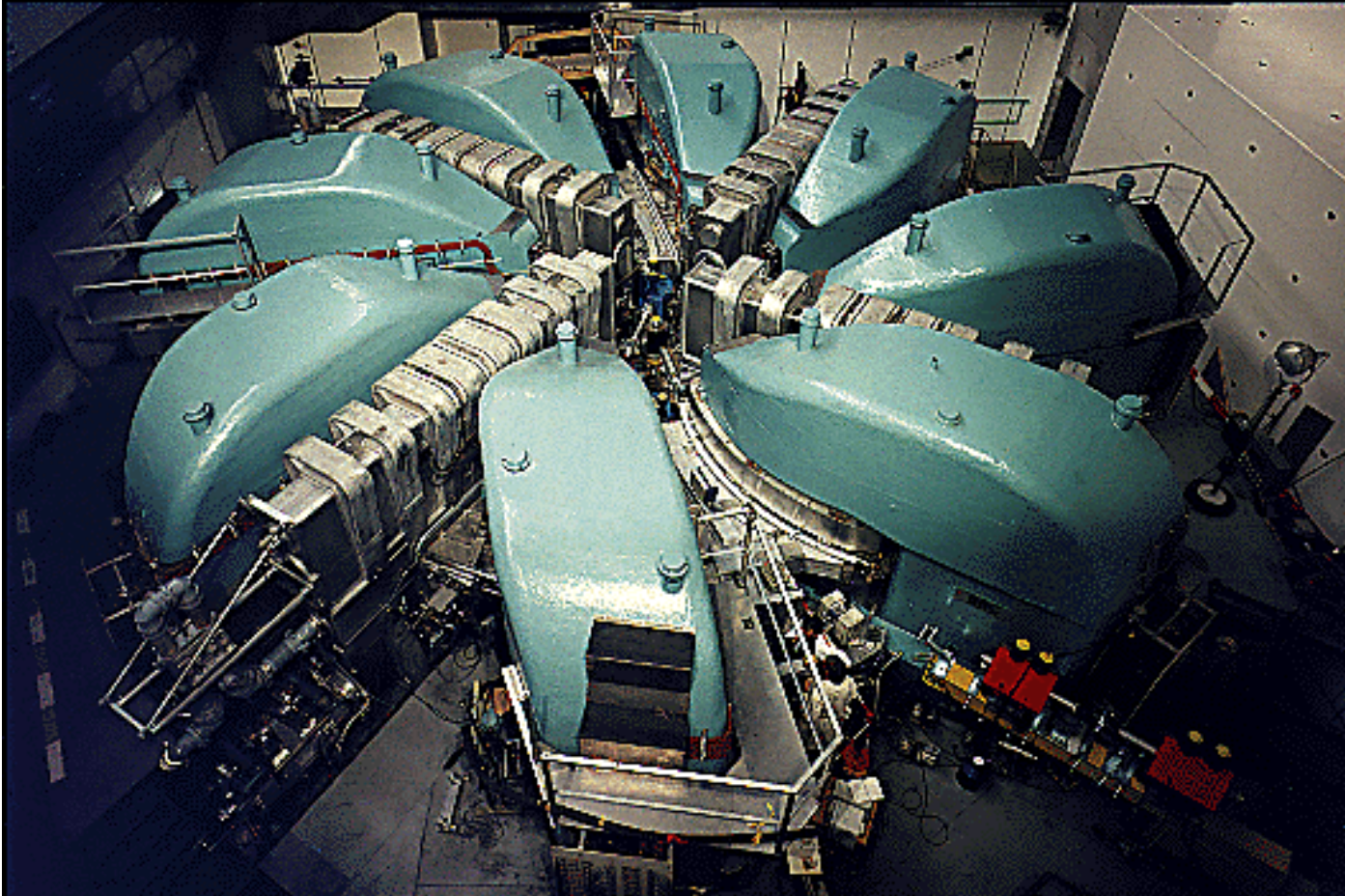
~~$$H(w, \phi) = \pi \frac{(w - w_0)^2}{\beta^2 \gamma m c^2} \left[ \frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right] + \underbrace{eV [\cos \phi - \cos \phi_0]}_{U(\phi)}$$~~

La dispersione in energia finale dipende dalla lunghezza del pacchetto

$$\frac{\Delta w}{w} = 1 - \cos(\phi)$$



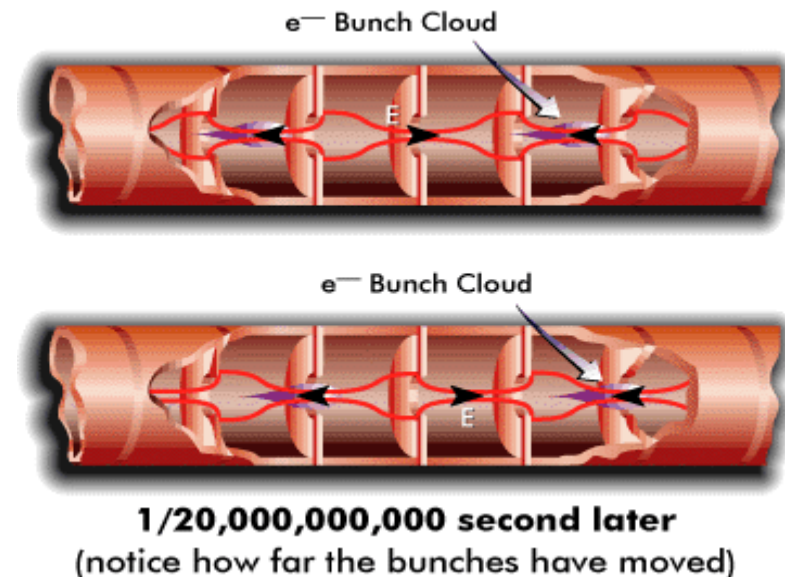
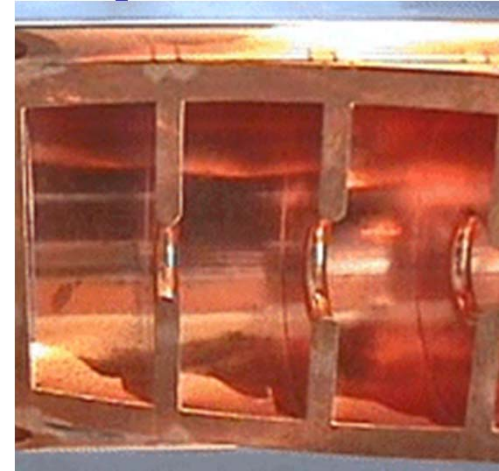
# The 590 MeV Ring Cyclotron of PSI



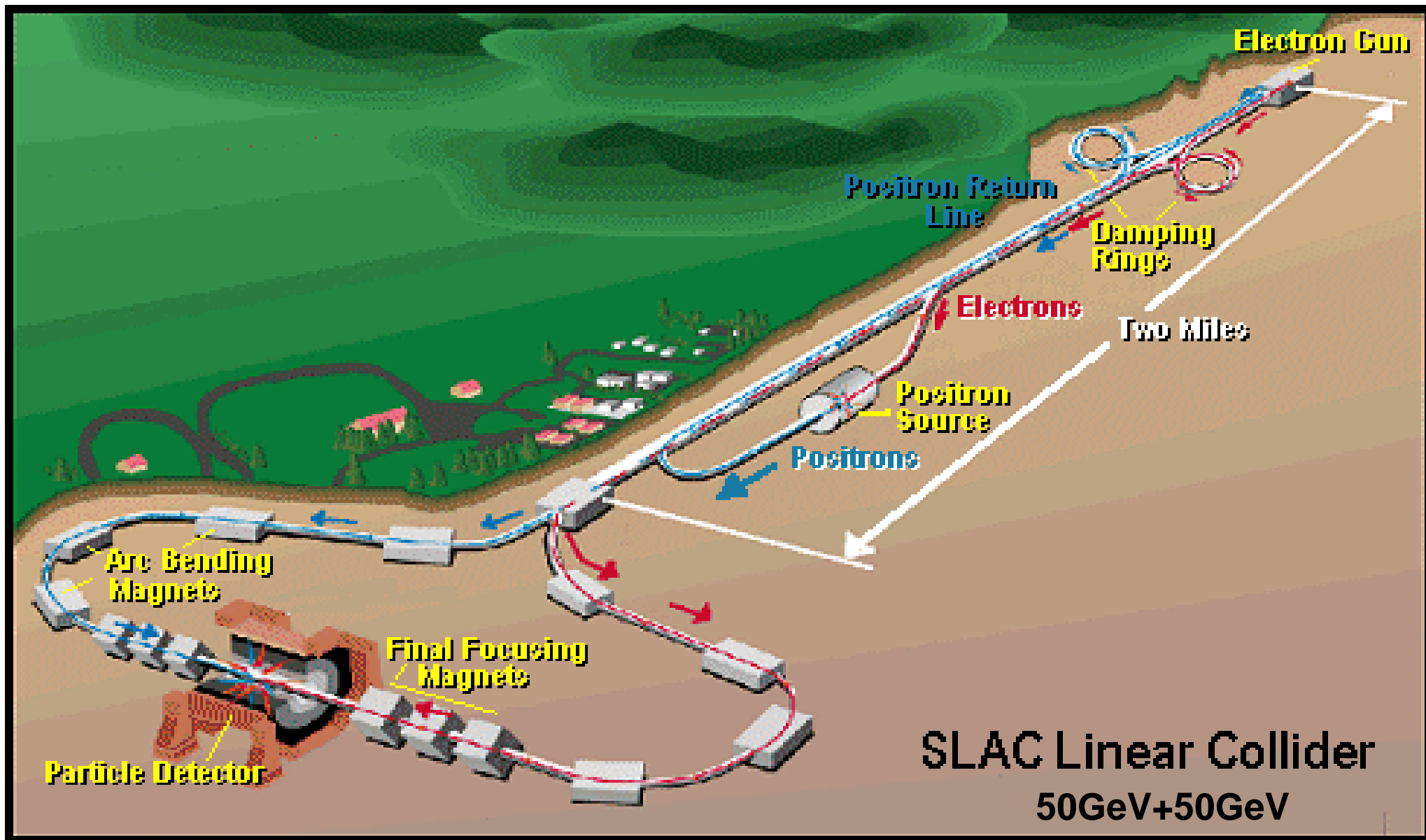
- Injection Energy 72 MeV
- Extraction Energy 590 MeV
- Extraction Momentum 1.2 GeV/c
- Energy spread (FWHM) ca. 0.2 %
- Beam Emittance ca. 2 pi mm x mrad
- Beam Current 1.6 mA DC

# Acceleratori isocroni: linac per elettroni

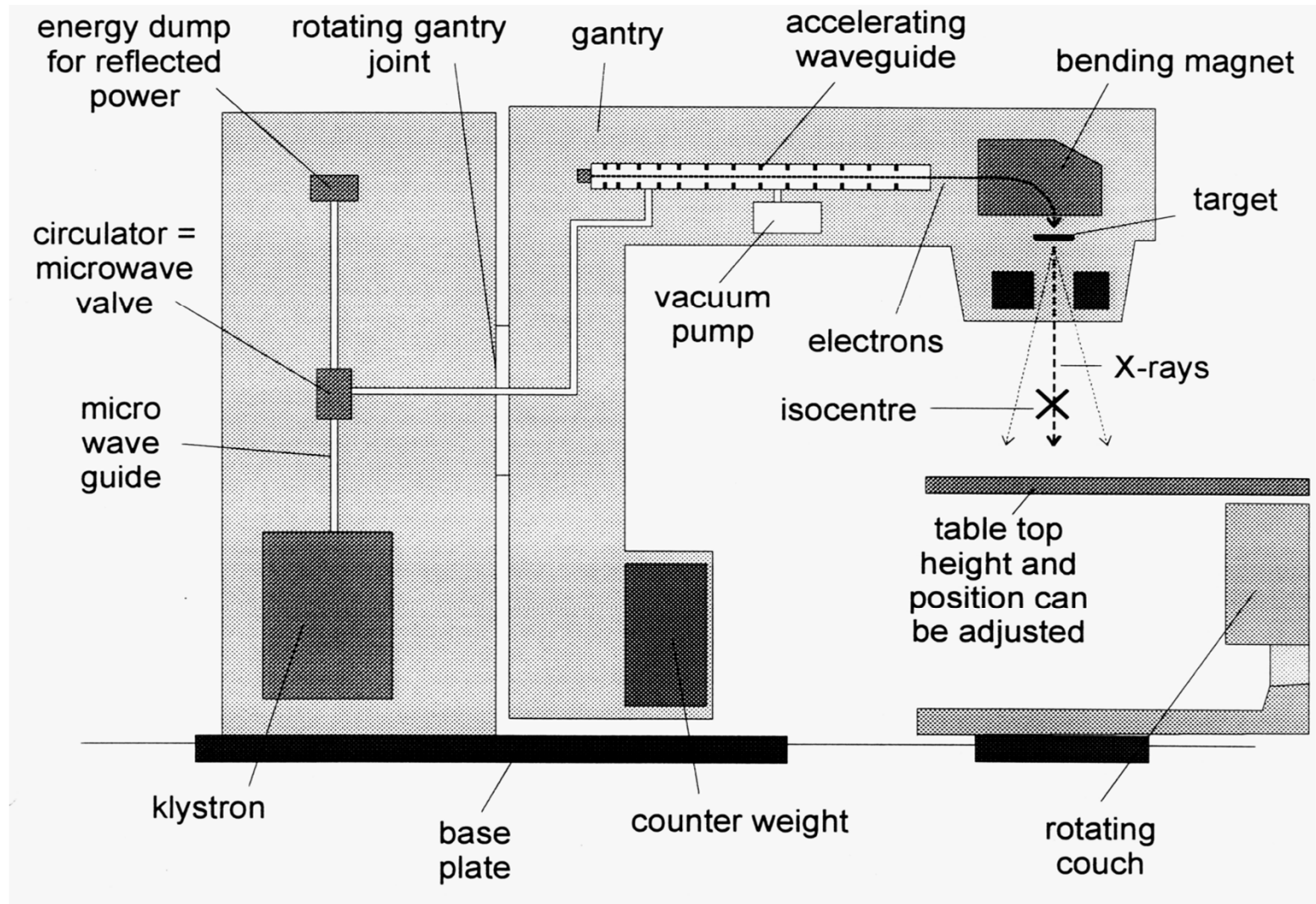
- Al di sopra dei 5-10 MeV tutti gli elettroni viaggiano sostanzialmente alla stessa velocità  $c$
- Non c'è quindi evoluzione nel piano fase energia, né stabilità di fase

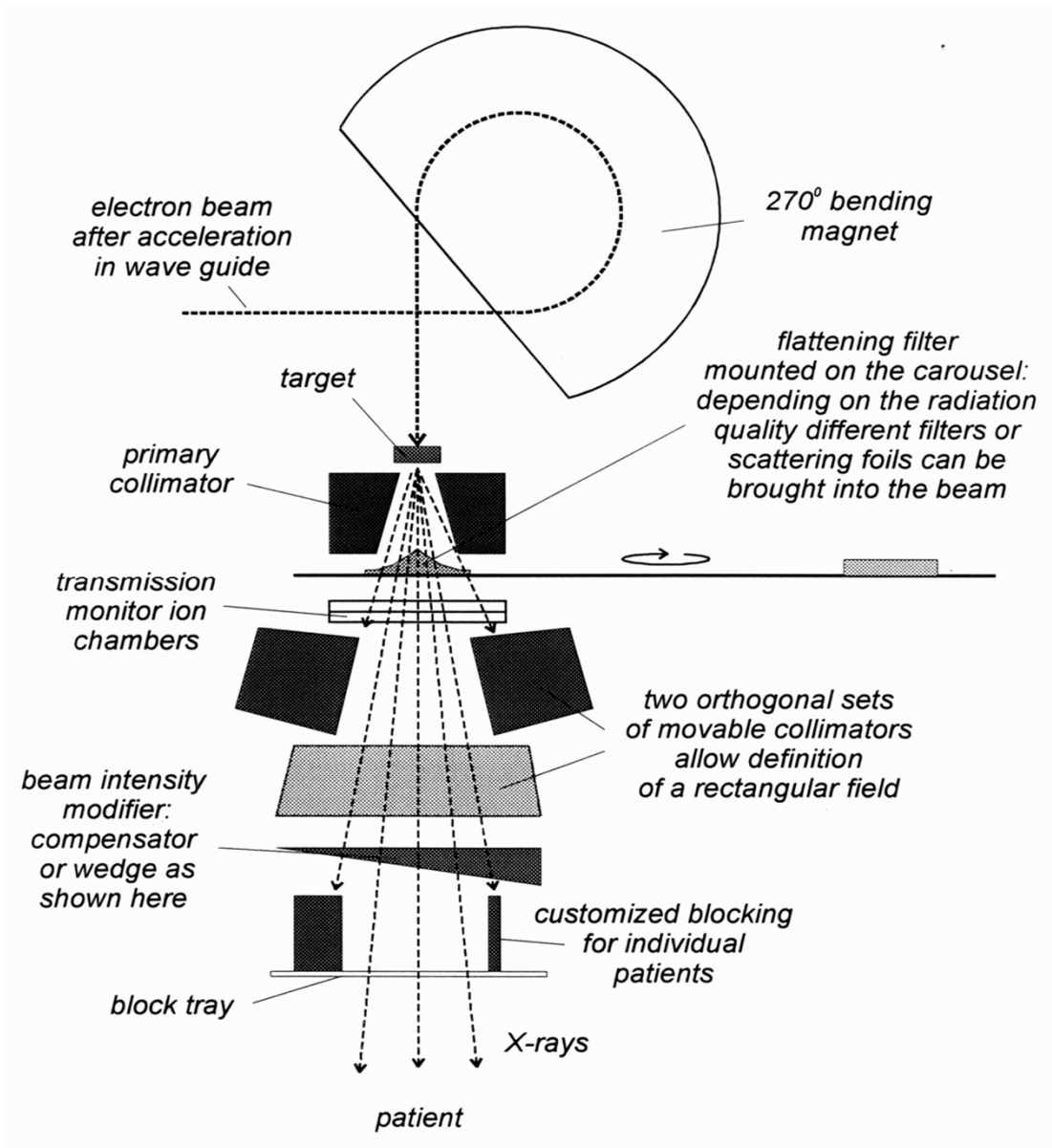


## S-Band Structures (3 GHz)

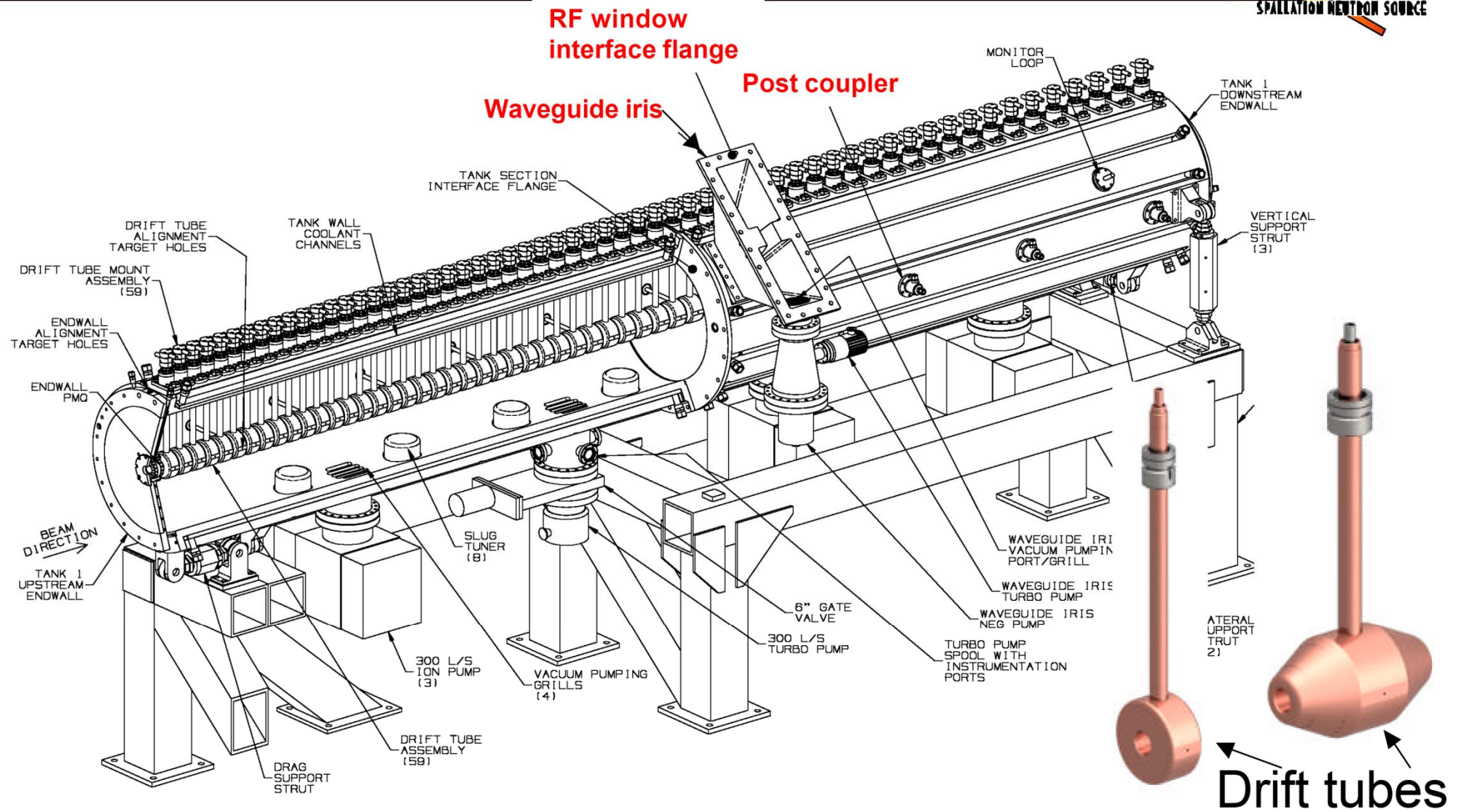


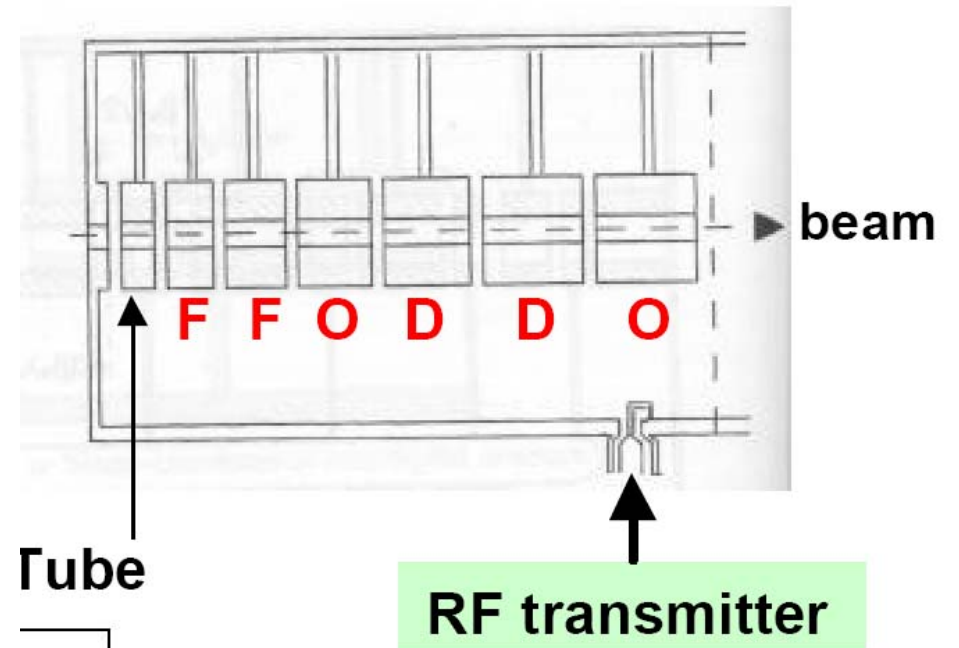
# Le stesse strutture vengono utilizzate per la radio terapia



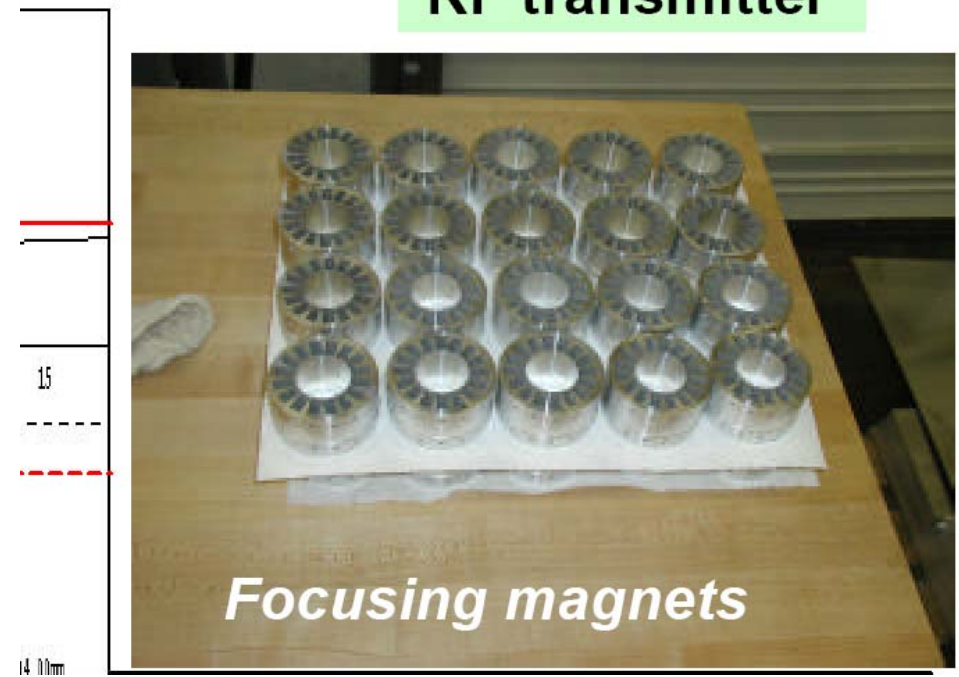


# SNS DTL Tank 1 Assembly Cutaway View



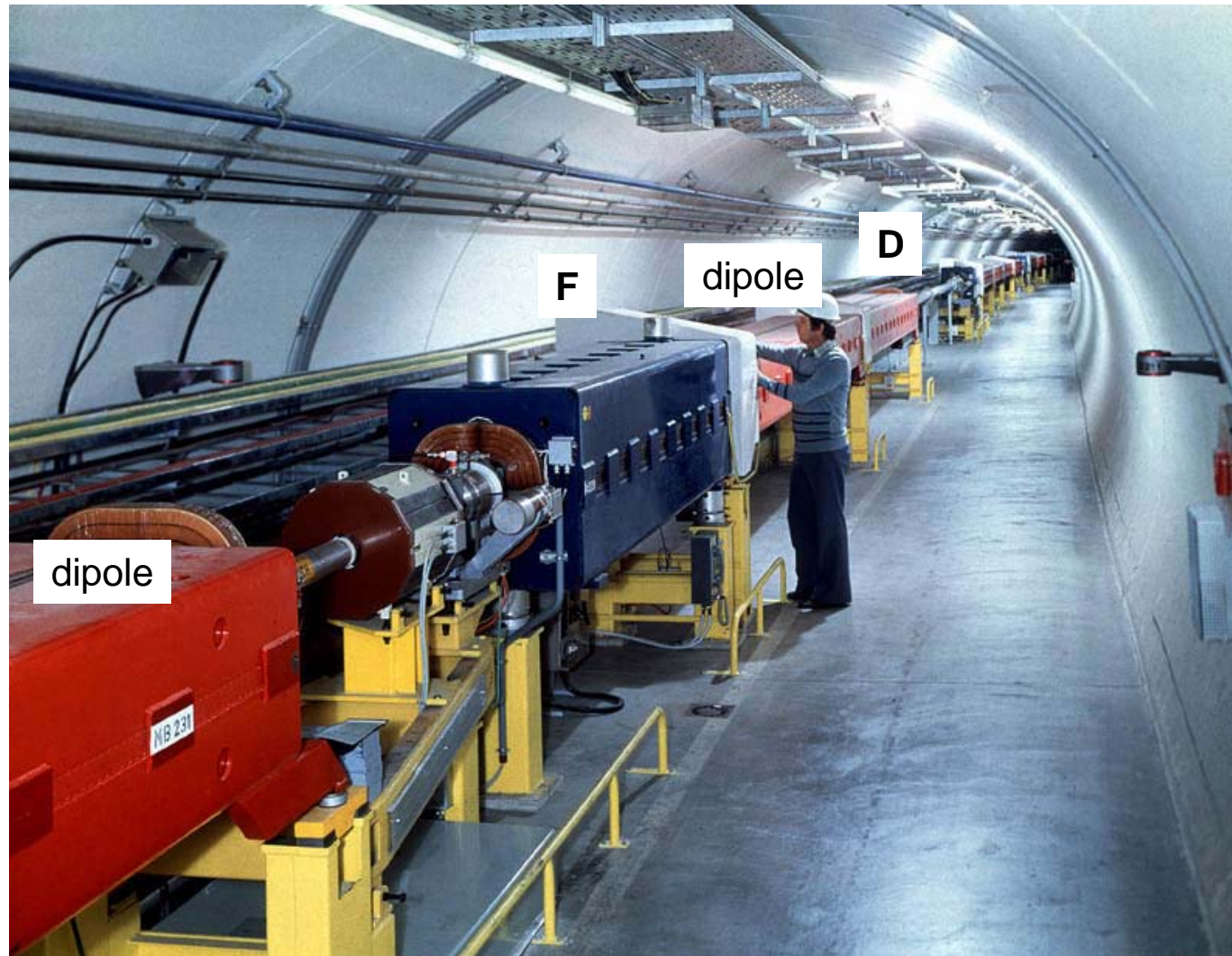


Magneti permanenti

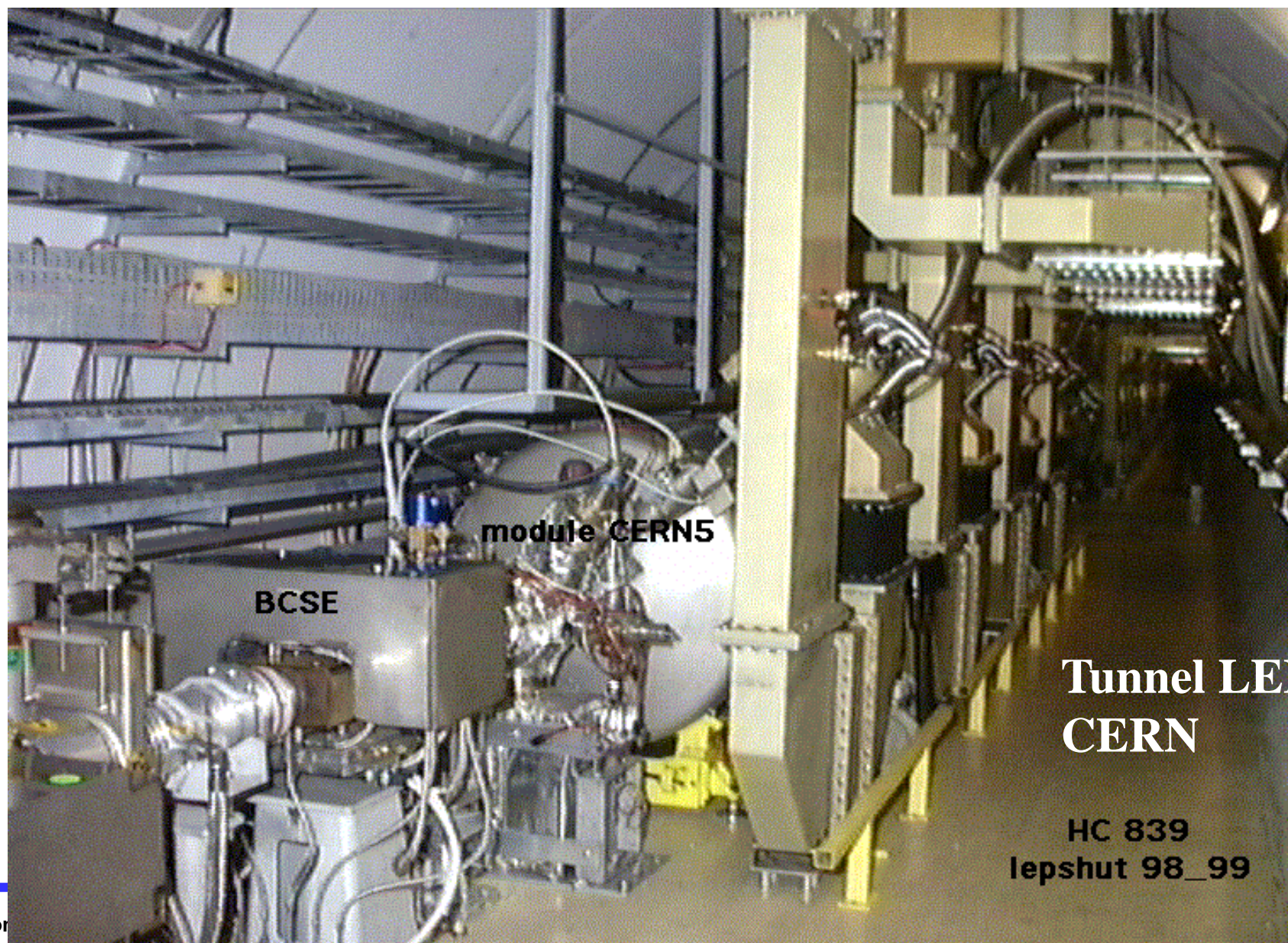




# SPS tunnel at CERN



# Superconducting cavity criomodules in LEP tunnel



# ALPI at INFN LEGNARO

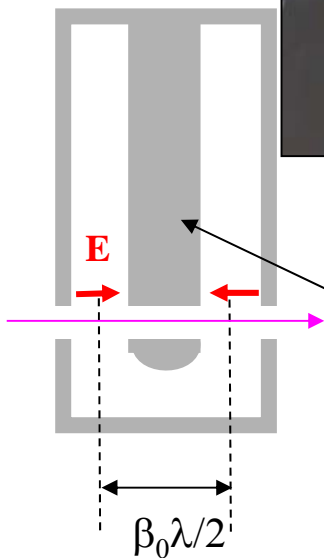


criostato



criostato

Quadrupoli magnetici



Cavità coassiale superconduttiva

**Acceleratore lineare per ioni pesanti (circa 10 MeV/u) basato su cavità superconduttive**

# Bibliografia

- Ecco una selezione di alcune lezioni della scuola CERN su cui si possono trovare gli argomenti trattati a lezione.

[http://doc.cern.ch/tmp/convert\\_p17.pdf](http://doc.cern.ch/tmp/convert_p17.pdf)

[http://doc.cern.ch/tmp/convert\\_p89.pdf](http://doc.cern.ch/tmp/convert_p89.pdf)

<http://doc.cern.ch/yellowrep/1994/94-01/p253.pdf>

<http://doc.cern.ch/yellowrep/1994/94-01/p289.pdf>

<http://doc.cern.ch/yellowrep/1987/1987-010/p15.pdf>

[http://doc.cern.ch/tmp/convert\\_p25.pdf](http://doc.cern.ch/tmp/convert_p25.pdf)

[http://doc.cern.ch/tmp/convert\\_p239.pdf](http://doc.cern.ch/tmp/convert_p239.pdf)

<http://doc.cern.ch/yellowrep/2005/2005-004/p198.pdf>

<http://doc.cern.ch/yellowrep/1996/96-02/p39.pdf>