

10. Richiami alla trasformata di Laplace

Fino ad ora abbiamo considerato amplificatori con guadagno a maglia aperta infinito, indipendentemente dalla frequenza del segnale. Ovviamente questa è una semplificazione valida solo per segnali in continua o per frequenze molto basse. In effetti dovremo preoccuparci della variazione del guadagno in funzione della frequenza ovvero della risposta in frequenza dell'amplificatore che sarà necessariamente limitata essendo noto a tutti il concetto di banda passante di un amplificatore.

Per trattare la risposta degli amplificatori un dispositivo fondamentale è la trasformata di Laplace che permette di studiare la risposta di un circuito sia nel dominio del tempo che della frequenza, utilizzando il concetto di *frequenza complessa* $s = \sigma + j\omega$. La conoscenza della teoria generale della trasformata di Laplace dovrebbe essere nota perchè trattata in dettaglio in altri corsi. Ci limitiamo in questa sede ai richiami necessari per il suo uso nell'analisi degli amplificatori al fine di descriverne la risposta agli impulsi e il loro comportamento al variare della frequenza.

La trasformata $F(s)$ di una funzione $f(t)$ è data

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.10)$$

e, simmetricamente, nota $F(s)$ si ricava $f(t)$. In seguito sarà data una tabella (Tab. 1.10) con le trasformate di alcune funzioni tra le più usate in elettronica. In pratica non sarà mai necessario applicare la (1.10) ma sarà sufficiente consultare e utilizzare, eventualmente con alcuni artifici, la tabella in questione.

Per le trasformate valgono due teoremi molto importanti per la manipolazione delle trasformate.

Il primo dice che se $F(s)$ è la trasformata di $f(t)$, con $f(t)$ continua e uguale a f_0 per t che tende a 0 , allora la trasformata della derivata

$\frac{df}{dt}$ vale

$$sF(s) - f_0 \quad (2.10)$$

quella della derivata $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ vale

$$s^2 F(s) - sf_0 - f_1 \quad (3.10)$$

dove f_1 è il valore della derivata prima per per t che tende a 0 .

In generale la trasformata della $\frac{\partial^n f}{\partial t^n}$ vale

$$s^n F(s) - s^{n-1} f_0 - s^{n-2} f_1 \dots - f_{n-1} \quad (4.10)$$

Il secondo dice che se $F(s)$ è la trasformata di $f(t)$ risulta che la trasformata di $\int_0^t f(t') dt'$ è $\frac{1}{s} F(s)$.

Consideriamo a titolo di esempio il semplice circuito di Fig. 1.10.

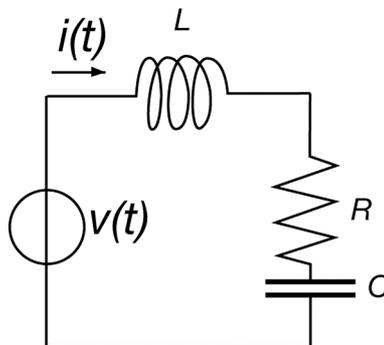


Fig. 1.10

Possiamo scrivere l'equazione della maglia come

$$L \frac{\partial i(t)}{\partial t} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t) \quad (5.10)$$

trasformando sia $i(t)$ che $v(t)$ e ricordando come vengono trasformati integrali e derivate otteniamo

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) = V(s) \quad (6.10)$$

ovvero otteniamo l'impedenza del circuito come

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL + R + \frac{1}{sC} \quad (7.10)$$

Nel caso del circuito di Fig. 2.10 possiamo ottenere la funzione di trasferimento

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = G(s) \quad (8.10)$$

La funzione (8.10) ha un solo polo per $s = -\frac{1}{RC}$.

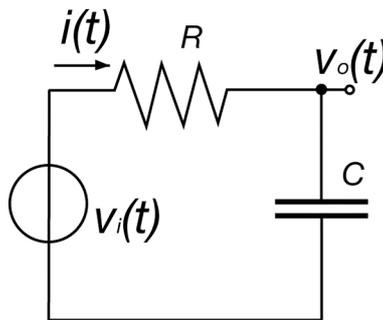


Fig. 2.10

La risposta in frequenza è data dalla (8.10) ove si sostituisca s con la sua parte immaginaria $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (9.10)$$

È conveniente esprimere l'ampiezza, modulo, della funzione di trasferimento in forma logaritmica o ancora meglio in decibel

$$20 \log|G(j\omega)| = -20 \log|1 + j\omega RC| \quad (10.10)$$

Il grafico della funzione si ottiene considerando gli asintoti per $\omega \rightarrow \infty$ e $\omega \rightarrow 0$. Essi sono rispettivamente la retta, in assi logaritmici,

$$20 \log |G(j\omega)| = -20 \log |j\omega RC| = -20 \log \omega RC \quad (11.10)$$

e l'asse delle ascisse.

La loro intersezione si ottiene ponendo

$$-20 \log \omega RC = 0 \quad (12.10)$$

da cui

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad (13.10)$$

e in essa, detta anche frequenza di taglio, vale

$$|G(j\omega)|_{db} = -20 \log |1 + j| = -20 \log(\sqrt{2}) = -3db \quad (12.10)$$

come ben noto.

La fase ϕ è data da

$$\phi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = -\arctg(\omega RC) \quad (13.10)$$

I grafici di ampiezza e fase della funzione sono mostrati nella Fig. 3.10. Derivando la (11.10) rispetto a $\log \omega$, si ottiene la pendenza dell'asintoto che è $20db$ per decade ovvero $6db$ per ottava. Ricordiamo che una decade significa intervallo tra una frequenza e quella di un ordine di grandezza superiore, mentre ottava è l'intervallo fra una frequenza e la frequenza doppia.

Siamo partiti, a titolo d'esempio, da una semplice funzione di trasferimento (8.10) di un comune circuito integratore, ma le funzioni di trasferimento di circuiti più complessi sono in generale della forma

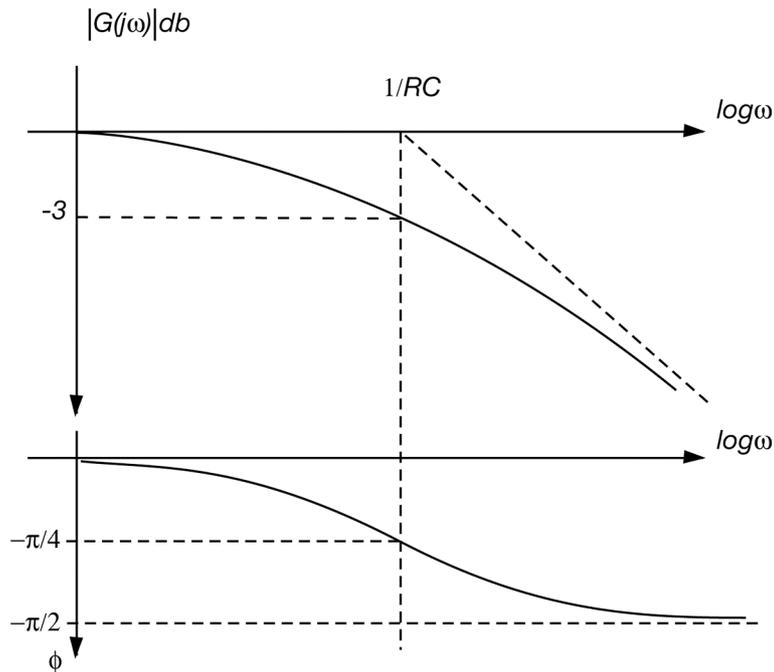


Fig. 3.10

$$G(s) = K \frac{s(T_a s + 1)(T_b^2 s^2 + 2\xi_b T_b s + 1)}{s(T_c s + 1)(T_d^2 s^2 + 2\xi_d T_d s + 1)} \quad (14.10)$$

Una funzione di questo tipo ha, per i fattori monomi e binomi, due zeri reali in $s=0$ e in $s=-\frac{1}{T_a}$, due poli reali in $s=0$ e in $s=-\frac{1}{T_c}$. Il fattore monomio, s , contribuisce con una curva il cui asintoto passa per l'origine delle ascisse logaritmiche, $\omega=1$, mentre gli altri fattori binomi hanno curve del tipo di Fig. 3.10, con l'avvertenza che se i fattori, qualsiasi sia il numero degli addendi, sono a numeratore le curve del tipo Fig. 3.10 sono nei semipiani superiori.

Per i fattori trinomi possiamo avere zeri e poli complessi coniugati.

Ma di nuovo è possibile trattare la curva di risposta ricorrendo agli asintoti senza calcolare esplicitamente zeri e poli.

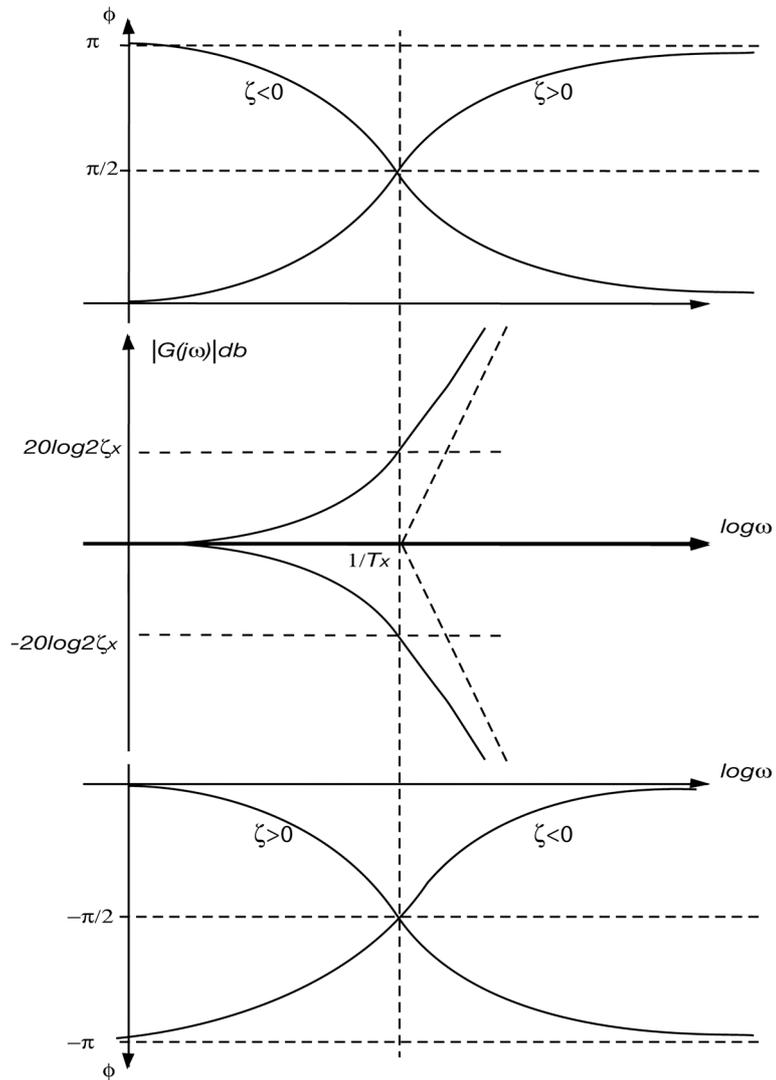


Fig. 4.10

L'ampiezza è

$$20 \log |G(j\omega)| = \pm 20 \log |(-T_x^2 \omega^2 + j 2 \zeta_x T_x \omega + 1)| \quad (15.10)$$

per i cui asintoti, per $\omega \rightarrow \infty$ e $\omega \rightarrow 0$, abbiamo rispettivamente la retta

$$|G(j\omega)|_{db} = \pm 40 \log |T_x \omega| \quad (16.10)$$

e la retta delle ascisse.

La loro intersezione è data di nuovo da

$$\omega_x = \frac{1}{T_x} \quad (17.10)$$

solo che la pendenza ora è doppia rispetto a quella della Fig. 3.10.

La fase è data da

$$\phi = \pm \arctg \frac{2\xi T_x \omega}{1 - T_x^2 \omega^2} \quad (18.10)$$

che è ora di $\pm\pi$ per $\omega \rightarrow \infty$. Il contributo dei termini trinomiali, a seconda contengano poli o zeri sono dati dai grafici della Fig. 4.10. Per quanto riguarda le fasi tuttavia bisogna anche tenere presente, come risulta dalla (18.10), anche il segno di ξ .

Il discostarsi più o meno della curva dagli asintoti dipende dal valore di ξ .

A titolo di esempio tracciamo la curva di risposta, disegnando gli asintoti della funzione

$$G(s) = 0.25 \frac{s(1 + 0.1s)}{(1 + 0.05s)(1 + 0.3\sqrt{2}s + 0.5s^2)} \quad (19.10)$$

ove $\xi = 0.3$.

Le frequenze di intersezione corrispondenti agli zeri sono rispettivamente $\omega_{z1} = 1$, asintoto verso l'alto a $6db$ per ottava, $\omega_{z2} = 10$, asintoto verso l'alto a $6db$ per ottava. Quelle corrispondenti ai poli sono $\omega_{p1} = 20$, asintoto verso il basso a $-6db$ per ottava, $\omega_{p2} = \sqrt{2}$, asintoto verso il basso a $-12db$ per ottava.

La curva risulta pertanto come in Fig. 5.10.

Nella Fig. 6.10 (tratta da *H. M. James, N. B. Nichols and R.S. Phillips, "Theory of servomechanisms", MIT Radiation Lab. Series, Vol. 25, p. 144, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949*) è dato l'andamento della curva della fase in funzione di ξ .

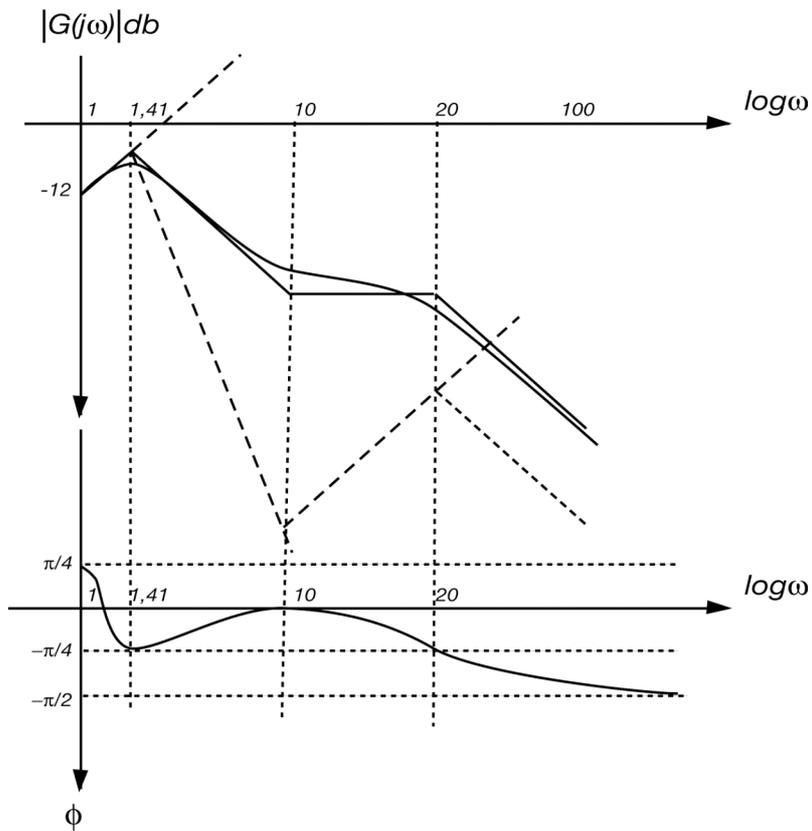


Fig. 5.10

Diamo nella tabella , Tab. 1.10, le trasformate di alcune funzioni comuni nel trattamento dei segnali.

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\delta(t)$	1
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$

$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{-bt} \cos(at)$	$\frac{s + b}{(s + b)^2 + a^2}$
$e^{-bt} \sin(at)$	$\frac{a}{(s + b)^2 + a^2}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$
$\frac{1 - \cos(at)}{a^2}$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$
$\frac{at - \sin(at)}{a^3}$	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$

Tab. 1.10

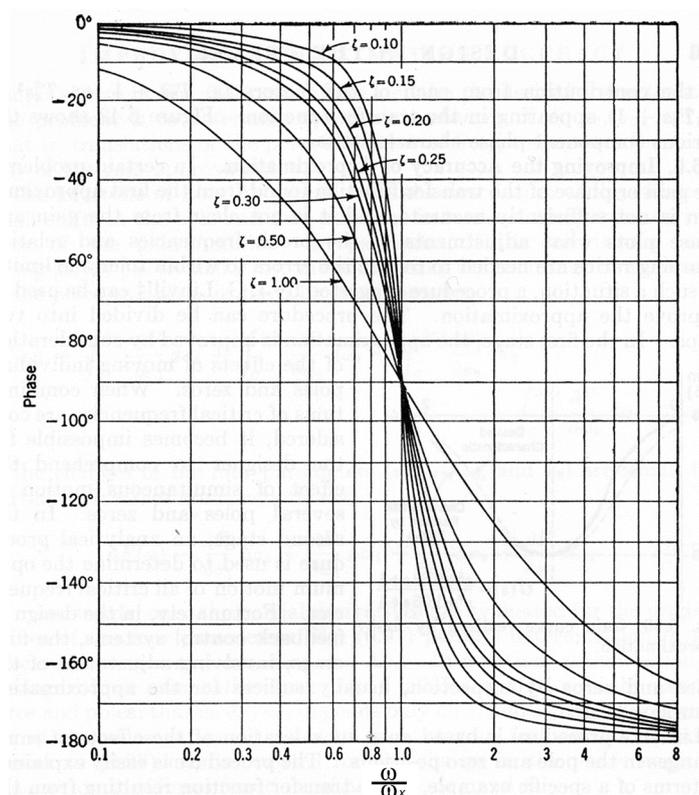


Fig. 6.10

Le antitrasformazioni richiedono sovente una certa dose di inventiva per ridurre l'espressione da antitrasformare ad una somma di funzioni facilmente trasformabili. Diamo di seguito alcuni esempi.

Esempio 1

Supponiamo di dover antitrasformare la seguente funzione

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)} \quad (20.10)$$

che non c'è nella Tab. 1.10.

Poniamo allora

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+8} = \frac{As^2+4sA+8A+Bs^2+Cs}{s(s^2+4s+8)} \quad (21.10)$$

Otteniamo quindi

$$A+B=0$$

$$4A+C=1$$

$$8A=1$$

ovvero $A = 1/8$, $B = -1/8$ e $C = 1/2$.

La (20.10) si può scrivere allora come

$$F(s) = \frac{1}{8s} - \frac{1}{8} * \frac{s+2}{(s+2)^2+4} + \frac{3}{8} * \frac{2}{(s+2)^2+4} \quad (22.10)$$

i cui addendi sono tutti trasformati note.

Otteniamo quindi in definitiva

$$f(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2t} \cos(2t) + \frac{3}{8} e^{-2t} \sin(2t) \quad (23.10)$$

che descrive l'andamento della funzione nel dominio del tempo.

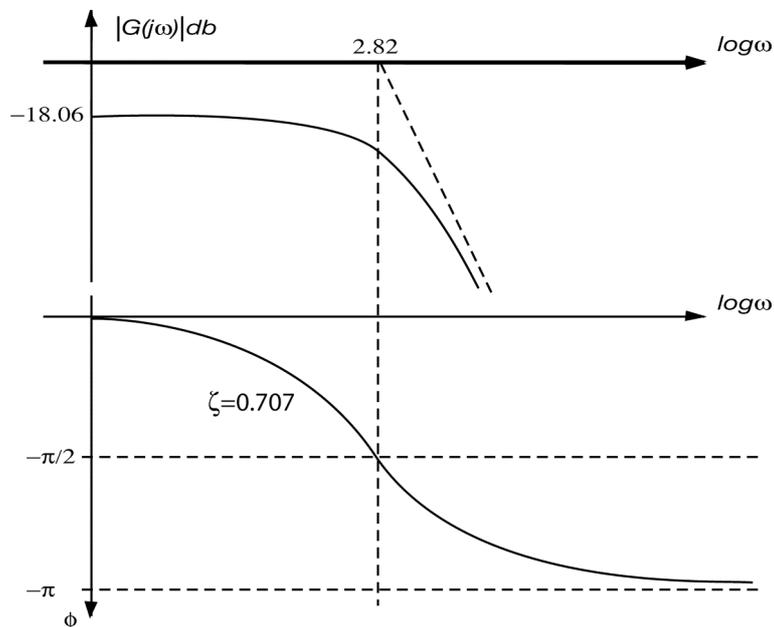


Fig. 7.10

Verificare che il grafico dell'ampiezza e della fase, in funzione della frequenza, siano quelli della Fig.7.10. Riscrivere preventivamente la (20.10) come

$$G(j\omega) = 8^{-1} \frac{1 + j\omega}{j\omega \left[1 + j2 \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{8}} \omega - \left(\frac{1}{\sqrt{8}} \right)^2 \omega^2 \right]} \quad (24.10)$$

Esempio 2

Consideriamo ora la

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)} \quad (25.10)$$

Analogamente a prima poniamo ora

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \quad (26.10)$$

Otteniamo quindi $A = \frac{2}{25}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = -\frac{2}{25}$, $D = -\frac{3}{25}$, da cui

$$F(s) = \frac{2}{25} * \frac{1}{s+1} + \frac{1}{5} * \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{25} * \frac{s}{s^2+2^2} - \frac{3}{25*2} * \frac{2}{s^2+2^2} \quad (27.10)$$

e, antitrasformando, si arriva a

$$f(t) = \frac{2}{25} e^{-t} + \frac{1}{5} t * e^{-t} - \frac{2}{25} \cos(2t) - \frac{3}{50} \sin(2t) \quad (28.10)$$

che descrive la funzione nel dominio del tempo.

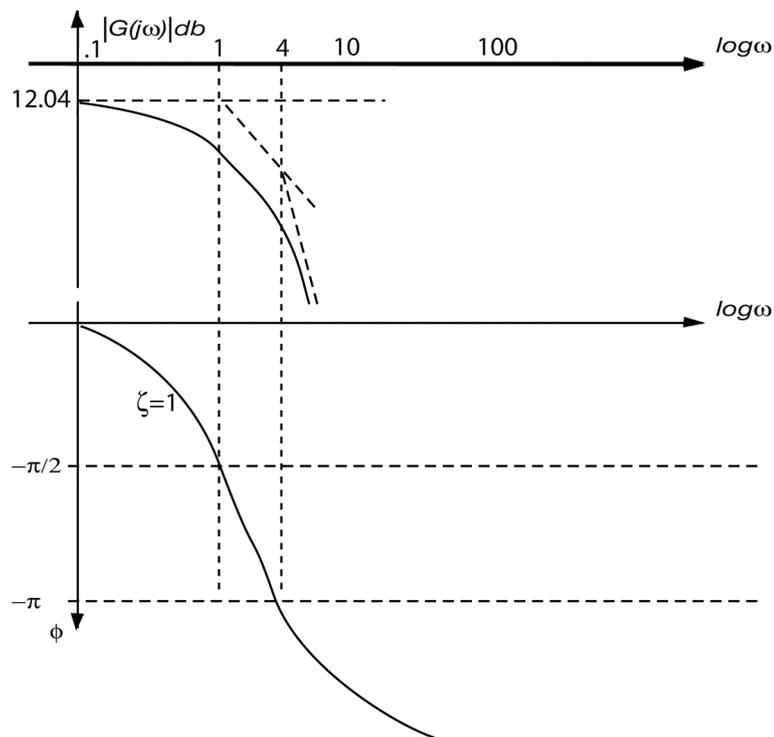


Fig. 8.10

Il suo grafico in funzione della frequenza si ricava dalla (25.10) riscritta come

$$G(j\omega) = \frac{0.25}{(1 + j2\omega - \omega^2)(0.25\omega^2 + 1)} \quad (29.10)$$

Esempio 3

Supponiamo di aver a che fare con il segnale prodotto da un rivelatore a ionizzazione. Non è questa la sede per entrare nel dettaglio descrittivo di tale classe di rivelatori, ci basterà trattare il rivelatore come una sorgente di segnale costituita da un generatore di corrente che genera delle delta di carica con in parallelo la capacità del rivelatore, secondo lo schema di Fig. 9.10. Nella stessa figura appare l'amplificatore che risulta essere un integratore approssimanto.

La convenienza di utilizzare una simile configurazione è

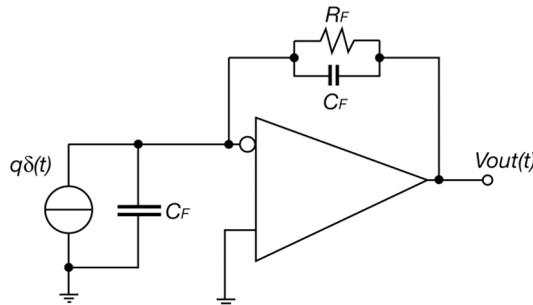


Fig. 9.10

immediatamente evidente se si pensa alle quantità di carica in gioco e alle dimensioni della capacità del rivelatore: si possono benissimo avere cariche di alcune migliaia di elettroni, dell'ordine quindi del fC o frazione di fC , associate a capacità dell'ordine delle frazioni di nF . È chiaro che cariche di tal tipo producono sulla capacità associata segnali in tensione dell'ordine del μV o della frazione di μV , che richiederebbero amplificazioni, a maglia chiusa, dell'ordine di 10^3 o anche 10^4 che sono decisamente impegnative ricordando quanto discusso nel §4. Inoltre la tensione provocata dalla carica di ionizzazione sarebbe comunque dipendente dalla capacità del rivelatore che, in molti casi, non è uniforme da canale a canale.

Nello schema di Fig. 9.10 il nodo d'ingresso è una massa virtuale che quindi impedisce che la capacità del rivelatore si carichi e obbliga la corrente di ionizzazione a passare tutta sull'impedenza di

controreazione. La delta di carica produrrà quindi una tensione ai capi della capacità di controreazione pari a $\frac{q}{C_f}$ che, se C_f viene tenuta dell'ordine del pF o della frazione di pF , può essere anche 10^3 volte maggiore del segnale che la carica q produrrebbe sulla capacità del rivelatore.

La funzione di trasferimento dell'amplificatore della figura risulta essere

$$G(s) = \frac{V_{OUT}(s)}{I_{IN}(s)} = \frac{R_F}{sR_F C_F + 1} = \frac{1}{C_F} \frac{1}{(s + 1/T_F)} \quad (30.10)$$

ove T_F è la costante di tempo dell'integratore. Per ottenere l'andamento temporale della tensione in uscita dobbiamo applicare la corrente d'ingresso trasformata e quindi antitrasformare. Dato che la corrente d'ingresso è data da $q\delta(t)$, la cui trasformata è nota (vedi Tav. 1.10), otteniamo la tensione d'uscita trasformata

$$V_{OUT}(s) = I_{IN}(s) \frac{1}{C_F} \frac{1}{(s + 1/T_F)} = \frac{q}{C_F} \frac{1}{(s + 1/T_F)} \quad (31.10)$$

e antitrasformando otteniamo

$$v_{OUT}(t) = \frac{q}{C_F} e^{-t/T_F} \quad (32.10)$$

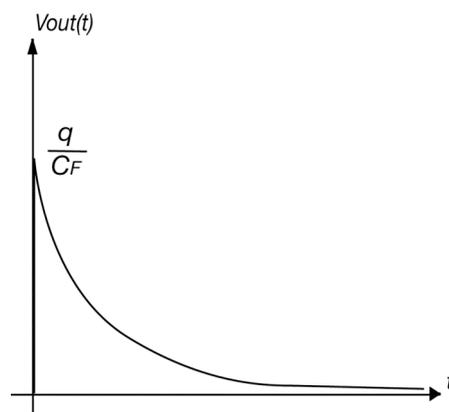


Fig. 10.10

Il segnale ha la forma della Fig. 10.10. Si vede che l'informazione che interessa ed è contenuta nel segnale è il valore di q . Per la sua misura si richiederebbe di valutare l'ampiezza ad un tempo fisso il che è evidentemente difficile qualsiasi sia il metodo utilizzato. Infatti se si misura a un tempo fisso lungo il tempo di decadimento, un piccolo errore temporale porta a grandi errori sull'ampiezza. Se si misura al tempo zero, si misura sulla cima di una punta idealmente assai acuminata con possibilità di errore ancora maggiore essendo massima la pendenza. Conviene allora trattare il segnale attraverso un filtro che ne modifichi adeguatamente la forma.

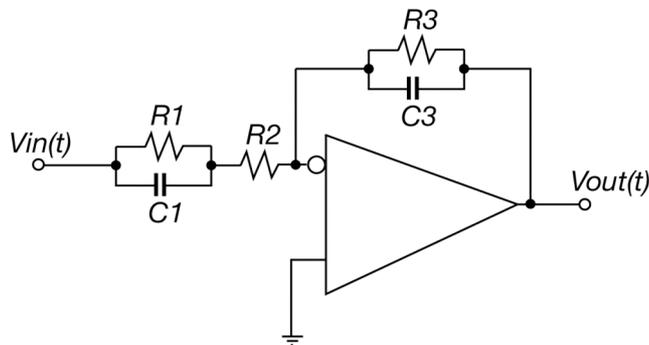


Fig.11.10

Applichiamo il segnale del tipo di (32.10) all'amplificatore di Fig. 11.10 la cui funzione di trasferimento risulta essere

$$G(s) = \frac{R_3}{(R_1 + R_2)} * \frac{1 + sR_1C_1}{[1 + s(R_1 \parallel R_2)C_1](1 + sR_3C_3)} \quad (33.10)$$

La sua curva di risposta si ricava scrivendo

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{ab} = & 20 \log \frac{R_3}{(R_1 + R_2)} + 20 \log |1 + j\omega R_1 C_1| - \\ & - 20 \log |1 + j\omega (R_1 \parallel R_2) C_1| - 20 \log |1 + j\omega R_3 C_3| \end{aligned} \quad (34.10)$$

ovvero

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \log \frac{R_3}{(R_1 + R_2)} + 20 \log |1 + j\omega T_1| - 20 \log |1 + j\omega T_p| - 20 \log |1 + j\omega T_3| \quad (35.10)$$

supponendo che $R_3 > (R_1 + R_2)$ e che sia $R_1 C_1 > R_p C_1 > R_3 C_3$ otteniamo la risposta di Fig. 12.10 risultando $1/T_3 > 1/T_p > 1/T_1$. È facile verificare quale siano le curve qualora le costanti di tempo siano in relazione diversa.

Consideriamo ora la risposta dell'amplificatore nel dominio temporale quando esso venga sollecitato da una $v_{in}(t) = V_0 e^{-\frac{t}{T_F}}$ essendo $V_0 = \frac{q}{C_F}$.

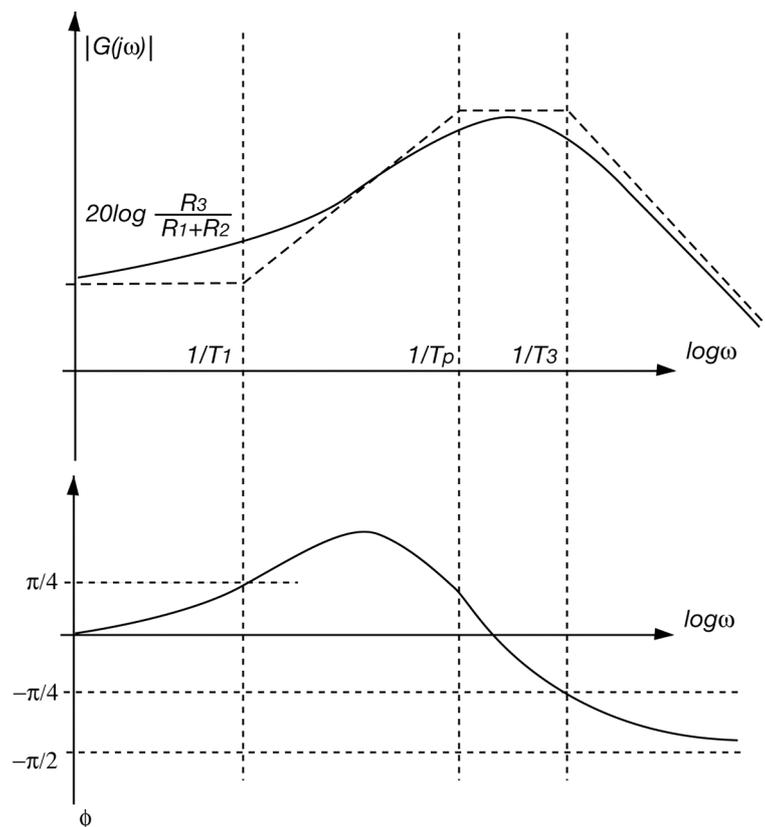


Fig. 12.10

Applicando la $V_{in}(s)$ desunta dalla tabella 1.10, otteniamo la tensione d'uscita trasformata

$$V_{out}(s) = \frac{V_0}{(s + 1/T_F)} * k \frac{T_1}{T_3 T_p} \frac{(s + 1/T_1)}{(s + 1/T_3)(s + 1/T_p)} \quad (36.10)$$

ove $k = \frac{R_3}{(R_1 + R_2)}$.

Possiamo accordare il circuito di Fig. 11.10 al tipo di esponenziale d'ingresso. In particolare vediamo cosa avviene se poniamo $T_F = T_1$ e $T_3 = T_p = T$.

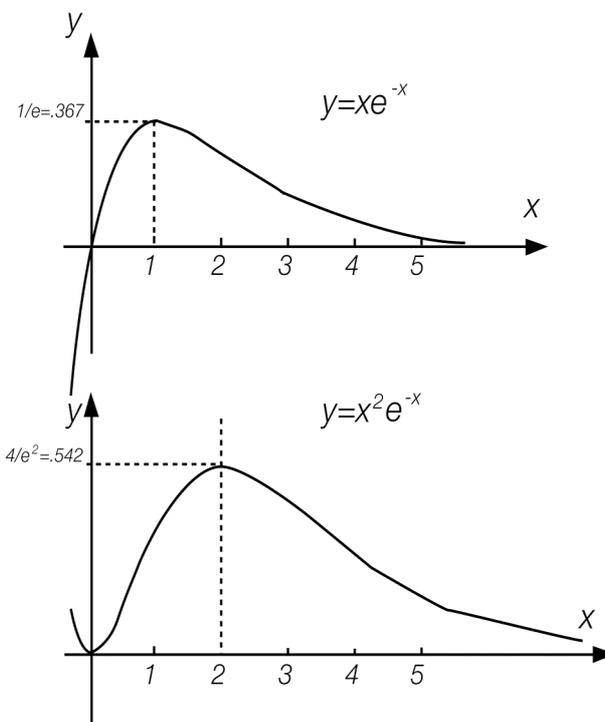


Fig. 13.10

La trasformata diventa

$$V_{out}(s) = V_0 k \frac{T_1}{T^2} \frac{1}{(s + 1/T)^2} \quad (37.10)$$

che si antitrasforma nella

$$v_{out}(t) = V_0 k \frac{T_1}{T} * \frac{t}{T} e^{-t/T} \quad (38.10)$$

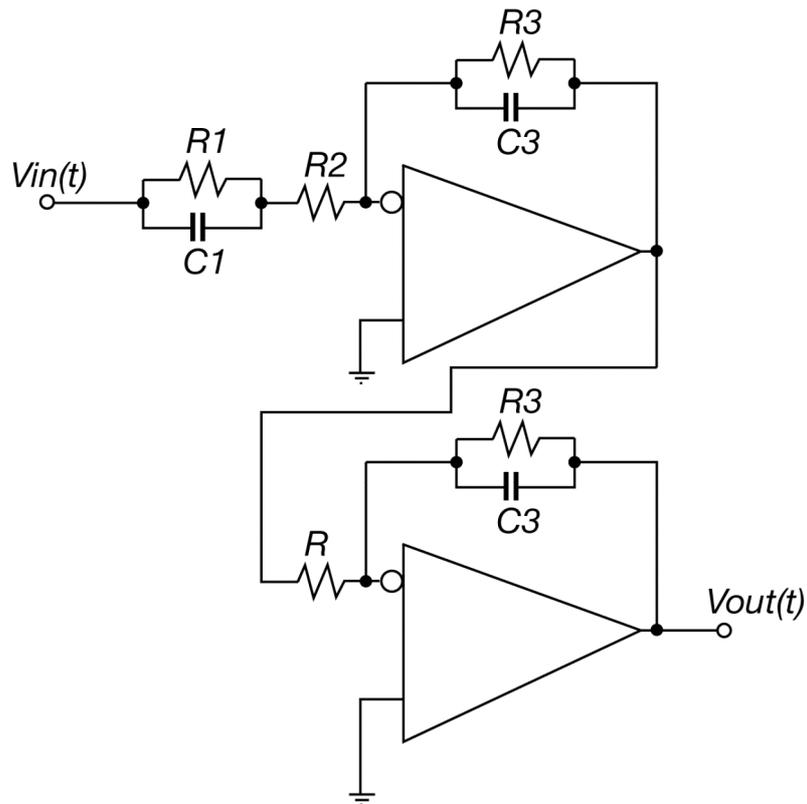


Fig. 14.10

L'andamento del segnale è dato nella figura 13.10 che mostra un tipo di filtratura detta xe^{-x} .

Questa funzione ha un massimo per $t = T$ che vale

$$v_{Max}(T) = \frac{q_{in}}{C_F} \frac{R_3}{(R_1 + R_2)} \frac{T_1}{T} * \frac{1}{e} \quad (39.10)$$

L'ampiezza del massimo dipende linearmente dalla carica iniettata, dal rapporto della costante di tempo d'integrazione del primo stadio sulla

costante di tempo della formatura ed è inversamente proporzionale alla C_F .

Nella figura è anche mostrata una filtratura del tipo x^2e^{-x} che ha una forma quasi Gaussiana. È chiaro che il massimo è ora a 2 nel grafico normalizzato. Per ottenere questo tipo di formatura è sufficiente far seguire un altro stadio di integrazione con uguale RC come in Fig. 14.10. Se si vuole riportare il picco nella stessa posizione si deve dimezzare la RC rispetto a quella usata per la formatura xe^{-x} . Con successive integrazioni con ugual RC si ottiene una formatura sempre più simile ad una Gaussiana.

