

1. Si dimostri (usando la forma matriciale delle trasformazioni di Lorentz) che
 - (a) boost successivi lungo lo stesso asse si compongono in modo gruppale;
 - (b) boost lungo assi diversi portano a trasformazioni che coinvolgono rotazioni degli assi.

2. Si calcolino

$$\epsilon^{iab} \epsilon_{jab}, \quad \epsilon^{\mu\rho\sigma\tau} \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}$$

$$\epsilon^{ija} \epsilon_{kla}, \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$$

e usando quanto appena dimostrato ed il fatto che $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \Leftrightarrow B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$ si riscriva

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}), \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}).$$

3. Si consideri il quadrivettore $A^\mu(x)$ dato da

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \\ -2x_0x_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Si calcoli il tensore $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Si calcolino $F^{\mu\nu}$, A^2 e F^2 .

4. Si considerino i tensori

$$B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^\mu = (2, -1, 0, 1). \quad (2)$$

Si calcolino $B^\mu{}_\mu$, $B_{\mu\nu}V^\nu$, B^2 , $B^{(\mu\nu)}$, V^2 , $B^{\mu\nu}V_\mu V_\nu$.

5. Data la legge del moto $x(x^0) = \arctan\left(\frac{x^0}{2}\right)$ in un dato SI, si calcolino la quadrirelatività e la quadriaccelerazione.
6. Dati tre quadrivettori A , B e C , uno di tipo spazio $A^2 = 4$, uno di tipo tempo $B^2 = -1$ e uno di tipo luce $C^2 = 0$, si discuta se è possibile avere $A^\mu B_\mu = A^\mu C_\mu = C^\mu B_\mu = 0$.
7. Si discuta il moto relativistico di un corpo uniformemente accelerato.

8. Un'asta di lunghezza $2L$ si trova a riposo in un sistema di riferimento S' che si muove con velocità v verso destra rispetto ad un sistema S dal quale osserviamo il tutto. L'asta ha il centro in corrispondenza dell'origine degli assi del sistema S' ed è inclinata di un angolo θ' rispetto all'asse x' . All'istante $t = 0$ per l'osservatore in S un punto materiale P si trova ad un estremo dell'asta e percorre l'asta con accelerazione propria costante α .
- (a) a che istante il punto materiale lascia l'estremo dell'asta in S' ?
 - (b) a che istante in S passa per la metà dell'asta?
 - (c) che velocità raggiunge in S quando passa per l'origine? (trovare il quadrivettore completo)