1. Si considerino un campo elettrico e uno magnetico entrambi diretti lungo l'asse x nel proprio sistema di riferimento S .
 - (a) Come vengono viste in un sistema di riferimento in moto rispetto a S con velocità v lungo l'asse x ?
 - (b) E in un sistema in moto lungo l'asse y ?

2. Si verifichi che il generico boost si può scrivere

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & 1_3 + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\vec{\beta}^T \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

3. *Lungo, ma il risultato e' utile.* Si applichi al tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ un boost in direzione generica $\vec{\beta}$. Si dimostri che se si scompongono $\vec{E}$ e $\vec{B}$ nelle componenti parallele e ortogonali a $\vec{\beta}$ si ottiene che trasformano come:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, \\ E'_{\perp} &= \gamma (E_{\perp} + \vec{\beta} \wedge \vec{B}), & B'_{\perp} &= \gamma (B_{\perp} - \vec{\beta} \wedge \vec{E}). \end{aligned}$$

4. Si dimostri che se $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ esiste un sistema di riferimento in cui $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$.

5. Si dimostri che se $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ esiste un sistema di riferimento in cui

- (a) $E = 0$, se $B^2 - E^2 > 0$;
- (b) $B = 0$, se $B^2 - E^2 < 0$;
- (c) $\vec{E} \perp \vec{B}$, se $B^2 - E^2 = 0$.

6. Si discuta il moto di una carica elettrica quando

- (a) $B = 0$;
- (b) $E = 0$;
- (c) $\vec{E} \parallel \vec{B} \parallel \hat{z}$.

7. In un sistema di riferimento inerziale S , la posizione di una carica puntiforme $\vec{r}_q$ cambia come $\vec{r}_q = vt \hat{z}$ (si muove con velocità v in direzione z , passando per l'origine a $t = 0$). Nel sistema di riferimento S' , in cui la carica e' ferma all'origine, la legge di Coulomb recita

$$\vec{E}' = q \frac{\vec{r}'}{r'^3}.$$

Si calcoli il campo elettrico al tempo $t = 0$, nel sistema S . *Lo si esprima in termini dell'angolo polare θ tale che $z = r \cos \theta$ e $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$.*

8. **Legge di Biot–Savart.** La legge di Biot–Savart (in unità per cui $\epsilon_0 = 1/4\pi$) è data da

$$d\vec{B} = \frac{q}{c} v d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1)$$

Si dimostri che la si può ottenere a partire dall'equazione di Coulomb per una carica ferma tramite un boost nella direzione del moto della corrente elettrica e approssimando il risultato per $\gamma \sim 1$ (ricordiamo che la velocità media delle cariche nei circuiti elettrici è molto più piccola della velocità della luce). Si noti anche che questa coincide esattamente con (1) nella sezione spaziale ortogonale al moto della carica e in cui si trova la carica stessa.

9. **Compito del 07/01/09:** Il comandante di una astronave vede di fronte a sé due asteroidi e decide di distruggerli sparando due raggi laser della stessa energia e allo stesso istante. Al momento del fuoco un bersaglio si trova esattamente di fronte all'astronave, mentre per colpire il secondo il laser viene sparato ad un angolo θ rispetto alla linea che collega l'astronave al primo asteroide. Per il comandante i due asteroidi vengono distrutti simultaneamente. Come viene descritta questa serie di eventi da un osservatore su una base spaziale rispetto a cui gli asteroidi sono fermi e l'astronave viene vista muoversi in direzione del primo asteroide con una velocità pari a β volte la velocità della luce? In particolare si calcoli, nel sistema di riferimento della base spaziale:

- a) la frequenza dei due raggi laser;
- b) la differenza temporale tra le due esplosioni;
- c) la distanza spaziale tra l'astronave all'istante del fuoco ed i due asteroidi.

Si immagini che i fotoni dei due raggi laser vengono da una annichilazione in soglia tra una particella e la sua antiparticella.

- d) Quanto vale la loro massa in funzione dell'energia dei fotoni?