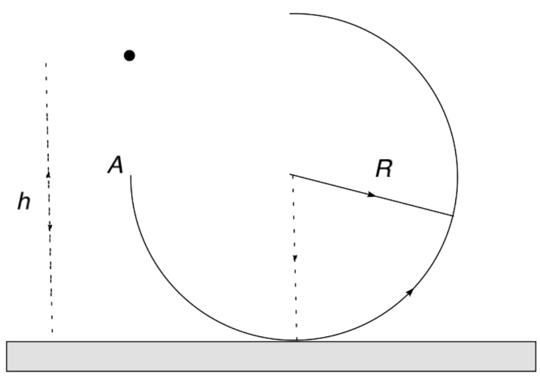
03.07.2014 # Compito di Fisica 1 per Matematica

---

1. Una porzione di guida circolare di lughezza pari a 3/4 della circonferenza è posta in un piano verticale, appoggiata ad un piano orizzontale. Denotando con ϕ l'angolo misurato a partire dal punto di appoggio, in verso antiorario lungo la guida, quest'ultima ha un estremo A a $\phi = -\pi/2$, come in figura. La guida è liscia e incernierata al punto di appoggio, con raggio $R = 40\,cm$. Un corpo di massa $m = 2\,kg$ cade, con velocità iniziale nulla, da un'altezza $h = (7/4)R$ dal piano d'appoggio, verticalmente sopra A, inserendosi poi in A nella guida. Si determinino:
   (a) l'espressione analitica per la velocità $v(\phi)$ del corpo ad un generico angolo ϕ;
   (b) la reazione vincolare esercitata dalla guida a $\phi = \pi/4$;
   (c) l'angolo ϕ_0 a cui il corpo si stacca dalla guida;
   (d) il momento angolare calcolato rispetto al polo A quando il corpo si trova al punto di stacco.



Traccia di soluzione:

a) Usando la conservazione dell'energia meccanica

$$mgh = \frac{1}{2}mv(\phi)^2 + mgR(1 - \cos\phi), \tag{1}$$

da cui

$$v(\phi) = \sqrt{gR(3/2 + 2\cos\phi)}. \tag{2}$$

b) Proiettando l'equazione del moto in direzione radiale (centripeta) si ottiene

$$ma_c = m\frac{v(\phi)^2}{R} = N - mg\cos\phi, \tag{3}$$

da cui

$$N(\phi) = 3mg\left(\frac{1}{2} + \cos\phi\right), \qquad N(\pi/4) = \frac{3}{2}mg(1+\sqrt{2}) = 71\,N. \tag{4}$$

c) L'angolo di stacco è quello in cui la reazione vincolare si annulla:

$$N(\phi_0) = 3mg\left(\frac{1}{2} + \cos\phi_0\right) = 0 \tag{5}$$

e dunque $\cos\phi_0 = -\frac{1}{2}$, ovvero

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{3}. \tag{6}$$

d) Al punto di stacco S la velocità è $v(2\pi/3) = 1.4\, m/s$ ed è diretta tangenzialmente alla curva, dunque le sue componenti rispetto ad un sistema cartesiano con asse x parallelo a terra e y in direzione verticale sono

$$\vec{v}(2\pi/3) = v(2\pi/3)\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) \end{pmatrix} = v(\pi/3)\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Il vettore $\vec{r}_{AS}$ è

$$\vec{r}_{AS} = \begin{pmatrix} R + R\sin(2\pi/3) \\ -R\cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+2}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Il momento angolare rispetto ad A è ottenuto dal prodotto esterno $\vec{L}_A = \vec{r}_{AS} \times m\vec{v}(\phi_0)$. Punta nella direzione ortogonale al piano del disegno e uscente da esso, con modulo

$$L_A = m(x_{AS}v_y(2\pi/3) - y_{AS}v_x(2\pi/3)) = 2.09\, kg\, m^2/s^2. \tag{9}$$

---

2. Una mole di gas perfetto biatomico è contenuta in un volume di 25 litri alla pressione di $10^5\, N/m^2$ (stato A). Essa viene compressa adiabaticamente e reversibilmente fino a dimezzare il suo volume (stato B). Successivamente viene portata isocoramente alla temperatura iniziale (stato C). Per ultimo viene lasciata espandere *liberamente e senza scambiare calore* con l'esterno fino al volume iniziale (stato D).

   Calcolare:

   (a) le temperature degli stati A e D;

   (b) il lavoro fatto dal gas nel ciclo;

   (c) i calori scambiati dal gas nel ciclo;

   (d) la variazione di entropia del gas fra B e C e fra C e D.

Traccia di soluzione:

Per un gas biatomico $C_V = C_P - 1 = \frac{5}{2}R$, $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5}$.
a,b) Dall'equazione di stato

$$T_A = p_A V_a / R = 300.7\,^oK. \tag{10}$$

Il gas fa lavoro nell'adiabatica AB, non ne fa nell'isocora BC nè nell'espansione libera CD. Allora

$$W_{tot} = W_{AB} = c_V(T_A - T_B). \tag{11}$$

Per calcolare T_B si ricorre all'equazione delle adiabatiche reversibili:

$$T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 396.8\,^oK. \tag{12}$$

Dunque

$$W_{tot} = -1997\,J. \tag{13}$$

c) Il calore è stato ceduto dal gas nella isocora. Dunque

$$Q_{tot} = Q_{BC} = c_V(T_C - T_B) = c_V(T_A - T_B) = W_{AB}. \tag{14}$$

Questo ci permette di calcolare T_D. Infatti visto che il lavoro prodotto è uguale al calore assorbito, l'energia interna del gas torna al valore iniziale e dunque

$$T_D = T_A. \tag{15}$$

d) Fra B e C il gas cede calore isocoramente per dimezzare il suo volume, dunque

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{T_B}^{T_C=T_A} c_V \frac{dT}{T} = c_V \log\frac{T_A}{T_B} = -5.763\,J/^oK. \tag{16}$$

Dato che in un ciclo la variazione totale di entropia è nulla

$$\Delta S_{CD} = -\Delta S_{BC}. \tag{17}$$