15.07.2019

Fisica 1 per Matematica

Nome: ...., Matr. ....

---

1. Un satellite di massa m orbita intorno alla Terra su un'orbita circolare posizionata ad una distanza dalla superficie terrestre h_1. Si risponda ai seguenti quesiti esprimendo i risultati in funzione dei dati di cui sopra e delle seguenti quantità: massa della Terra M_T, raggio terrestre R_T e costante di gravitazione universale G.

   (a) Quanto vale l'energia cinetica del satellite?

   L'equazione del moto per l'orbita circolare risulta

   $$m\frac{v^2}{R_T + h_1} = \frac{GM_T m}{(R_T + h_1)^2} .$$

   Da questa relazione possiamo calcolare l'energia cinetica del satellite in funzione dei dati del problema

   $$K(h_1) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T + h_1} .$$

   (b) Il rapporto tra energia potenziale gravitazionale e cinetica del satellite è un numero puro indipendente dai dati del problema. Si calcoli questo numero (indicando anche il segno corretto).

   L'energia cinetica è stata calcolata nel punto precedente. L'energia potenziale risulta

   $$U(h_1) = -\frac{GM_T m}{R_T + h_1} .$$

   Il rapporto tra energia potenziale e cinetica risulta

   $$\frac{U(h_1)}{K(h_1)} = -\frac{GM_T m}{R_T + h_1} \times 2\frac{R_T + h_1}{GM_T m} = -2 .$$

   (c) Si accendono dei motori per trasferire il satellite su una nuova orbita circolare posizionata ad una distanza dalla superficie terrestre h_2 (con $h_2 > h_1$). Quanto lavoro devono compiere i motori per realizzare questo trasferimento?

   Il lavoro che devono compiere i motori è uguale alla variazione di energia totale del satellite. L'energia totale iniziale risulta

   $$E(h_1) = K(h_1) + U(h_1) = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T + h_1} - \frac{GM_T m}{R_T + h_1} = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T + h_1} .$$

   Il lavoro richiesta quindi risulta

   $$L = E(h_2) - E(h_1) = \frac{GM_T m}{2}\left[\frac{1}{R_T + h_1} - \frac{1}{R_T + h_2}\right] .$$

   Il problema assume $h_2 > h_1$ quindi il lavoro compiuto dall'esterno deve essere positivo.

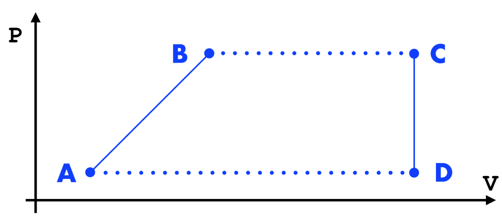
---

2. Una mole di gas biatomico è racchiusa in un cilindro con pistone ad altezza variabile. Inizialmente il volume è uguale a $V_A = V_0$ e la temperature $T_A = T_0$. Il gas viene riscaldato reversibilmente in modo che il rapporto p/V tra pressione e volume resti costante fino a che non si raggiunge lo stato B dove il volume viene raddoppiato ($V_B = 2V_A$). Il riscaldamento continua mettendo a contatto il sistema con una nuova sorgente termica, e tale trasformazione può essere schematizzata come un'isobara irreversibile fino a che si raggiunge lo stato C dove $V_C = 5V_A$. Successivamente, la pressione viene ridotta al valore iniziale tramite un'isocora reversible raggiungendo lo stato D. Infine, il sistema viene portato nello stato iniziale A mettendolo a contatto con una opportuna sorgente termica, e questa ultima trasformazione può essere considerata come un'altra trasformazione isobara irreversibile.

   Si risponda ai seguenti quesiti esprimendo il risultato in funzione di: V_0, T_0 e la costante universale dei gas R.

   (a) Si disegni nel piano (V, p) il ciclo, indicando con linee continue solo le trasformazioni reversibili.

   Il ciclo, percorso secondo l'ordine $A \to B \to C \to D$, è schematizzato nella seguente figura



   Solamente le trasformazioni reversibili hanno linee continue. Le trasformazioni irreversibili sono rappresentate da una successione di punti; è bene tenere a mente che tale rappresentazione non vuole assolutamente significare che il sistema passa per stati di equilibrio.

   (b) Si diano pressione, temperatura e volume nei vertici (A, B, C, D) del ciclo.

   Per quanto riguarda il punto di partenza abbiamo

$$p_A = \frac{RT_0}{V_0}\,, \qquad V_A = V_0\,, \qquad T_A = T_0\,.$$

   Dopo la prima trasformazione sappiamo che pressione e volume raddoppiano

$$p_B = 2\,\frac{RT_0}{V_0}\,, \qquad V_B = 2V_0\,, \qquad T_B = \frac{p_B V_B}{R} = 4T_0\,.$$

   La seconda trasformazione è una isocora quindi la pressione non cambia. Sappiamo inoltre il valore finale del volume e troviamo

$$p_C = 2\,\frac{RT_0}{V_0}\,, \qquad V_C = 5V_0\,, \qquad T_C = \frac{p_C V_C}{R} = 10T_0\,.$$

   Per raggiungere il punto D sappiamo che il volume non cambia e la pressione è uguale a quella iniziale

$$p_D = \frac{RT_0}{V_0}\,, \qquad V_D = 5V_0\,, \qquad T_D = \frac{p_D V_D}{R} = 5T_0\,.$$

(c) Si calcoli il rendimento del ciclo.
Il rendimento è dato dalla relazione generale

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{assorbito}}} \, .$$

Il lavoro totale compiuto dal gas si può ottenere sommando in contributi individuali $L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$. *Durante la prima trasformazione abbiamo*

$$L_{AB} = \int_{V_0}^{2V_0} p(V) dV = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{RT_0}{V_0^2} V dV = \frac{RT_0}{V_0^2} \left. \frac{V^2}{2} \right|_{V_0}^{2V_0} = \frac{3}{2} RT_0 \, .$$

Per quanto riguarda le isobare il lavoro è semplice da calcolare

$$L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = 2 \frac{RT_0}{V_0} \times 3V_0 = 6RT_0 \, ,$$
$$L_{DA} = p_D(V_A - V_D) = -\frac{RT_0}{V_0} \times 4V_0 = -4RT_0 \, .$$

Non vi è alcun lavoro compiuto durante l'isocora da C a D. Il lavoro totale risulta

$$L = \frac{7}{2} RT_0 \, .$$

Un modo alternativo, e probabilmente più rapido, di calcolare tale lavoro consiste nel valutare l'area del trapezio in figura

$$L = \frac{1}{2}(V_C - V_B + V_D - V_A)(p_C - p_B) = \frac{7}{2} RT_0 \, .$$

Il calore viene assorbito dal sistema soltanto durante le prime due trasformazioni. Per la prima trasformazione possiamo usare il primo principio della termodinamica (ricordandoci che il gas è biatomico)

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} RT_0 + \frac{5}{2} R \, 3T_0 = 9RT_0 \, .$$

Per la seconda trasformazione possiamo usare il calore specifico a pressione costante

$$Q_{BC} = \frac{7}{2} R \, 6T_0 = 21RT_0 \, .$$

Il rendimento risulta

$$\eta = \frac{L}{Q_{\text{assorbito}}} = \frac{L}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{7}{60} \simeq 0.12 \, .$$

(d) Si calcoli la variazione dell'entropia delle due sorgenti utilizzate per le due trasformazioni irreversibili $B \to C$ e $D \to A$.
Per la variazione di una sorgente termica usiamo la relazione generale

$$\Delta S_{\text{sorgente}} = -\frac{Q_i}{T_i} \, .$$

In questa relazione, Q_i *è il calore (con segno) assorbito dal gas e* T_i *la temperatura della sorgente. Per la trasformazione* $B \to C$ *abbiamo già calcolato il calore nel punto precedente e quindi abbiamo*

$$\Delta S_{\text{sorgente}}\big|_{B\to C} = -\frac{Q_{BC}}{T_C} = -\frac{21}{10} R \, .$$

Per la trasformazione $D \to A$ *il calcolo è analogo e troviamo*

$$\Delta S_{\text{sorgente}}\big|_{D\to A} = -\frac{Q_{DA}}{T_A} = -\frac{7}{2} \frac{R}{T_0} \, (-4T_0) = 14R \, .$$