23.08.2019

Fisica 1 per Matematica

Nome: ...., Matr. ....

---

1. Un corpo puntiforme di massa m si muove in una dimensione (asse x) sotto l'azione della forza

$$F(x) = a\,x - b\,x^3\,. \tag{1}$$

Si assuma $a > 0$ e $b > 0$.

(a) Quali sono le dimensioni di a e b? Si esprima la risposta come combinazione delle tre grandezze fondamentali del S.I.: massa, lunghezza e tempo.

Le dimensioni della forza, in funzione delle tre grandezze fondamentali, risultano

$$[F] = [M][L][T]^{-2}\,. \tag{2}$$

Dalla definizione della forza in questione ne deduciamo

$$[a] = [F][L]^{-1} = [M][T]^{-2}\,, \tag{3}$$

$$[b] = [F][L]^{-3} = [M][L]^{-2}[T]^{-2}\,. \tag{4}$$

(b) Ricavare la corrispondente energia potenziale $U(x)$ (si assume $U(0) = 0$).

L'energia potenziale segue dalla definizione

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\,, \tag{5}$$

con la richiesta addizionale che l'energia potenziale sia nulla all'origine. La soluzione risulta

$$U(x) = -\int_0^x F(x')dx' = -\frac{1}{2}a\,x^2 + \frac{1}{4}b\,x^4\,. \tag{6}$$

(c) Il corpo parte in quiete da un punto fissato x_0. Discutere in funzione dei parametri del problema in quale regione dell'asse x si svolge il moto.

L'energia meccanica del corpo è conservata e ad ogni istante vale

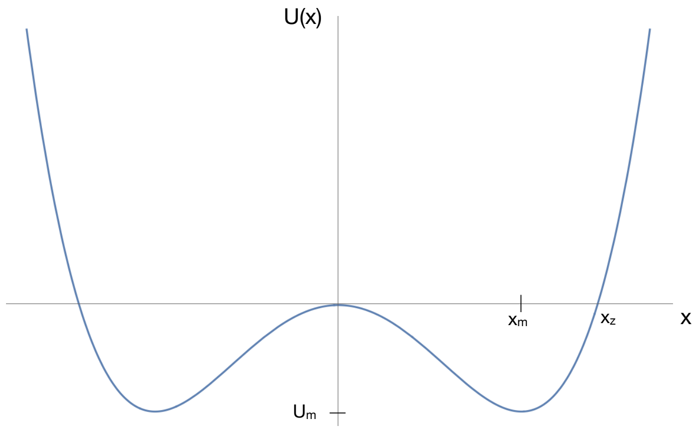
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x)\,. \tag{7}$$

Sappiamo anche il valore di tale costante del modo visto che il corpo parte da fermo (energia cinetica nulla) quando si trova nel punto di coordinata x_0

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = -\frac{1}{2}a\,x_0^2 + \frac{1}{4}b\,x_0^4\,. \tag{8}$$

L'energia cinetica del corpo è sempre positiva o nulla. Ne consegue che il moto può svolgersi soltanto nelle regioni dove è soddisfatta la disuguaglianza

$$U(x) = -\frac{1}{2}a\,x_0^2 + \frac{1}{4}b\,x_0^4 - \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \leq -\frac{1}{2}a\,x_0^2 + \frac{1}{4}b\,x_0^4 = E\,. \tag{9}$$



A questo punto è utile studiare più in dettaglio la forma funzionale della funzione energia potenziale. È un polinomio di quarto grado con solo coefficienti non nulli per i termini quadratici e quartici. Una bozza del grafico è illustrata nella figura seguente.
L'energia potenziale è minimizzata nel punto dove la forza è nulla

$$F(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm x_m = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}\,. \tag{10}$$

Il minimo dell'energia in tale punto vale

$$U_m = U(x_m) = -\frac{a^2}{4b}\,. \tag{11}$$

Inoltre, la funzione energia potenziale è nulla presso l'origine e nei punti

$$x = \pm x_z = \pm\sqrt{\frac{2a}{b}}\,. \tag{12}$$

Possiamo a questo punto iniziare la discussione distinguendo due casi principali

- $|x_0| > x_z = \sqrt{\frac{2a}{b}}$: *in questo caso l'energia totale del corpo è positiva e il corpo stesso si muove confinato nella regione* $[-x_0, x_0]$ *(assumendo che* $x_0 > 0$*).*
- $0 < |x_0| < x_z = \sqrt{\frac{2a}{b}}$: *in questo caso l'energia totale del corpo è negativa. Consideriamo il caso* $x_0 > 0$*; il caso in cui il valore iniziale della coordinata sia negativo è analogo. In questo caso il corpo risulta confinato tra i due valori positivi di* x *che soddisfano* $U(x) = U(x_0)$*: uno di essi è ovviamente* x_0*, l'altro si può determinare risolvendo l'equazione quadratica corrispondente. Fa eccezione il caso in cui* $x_0 = \sqrt{a/b}$*; in questo caso il corpo inizia dal minimo stabile e non si muoverà ulteriormente.*

Restano due casi limite dove l'energia è esattamente nulla. Il primo è quando il punto iniziale è l'origine: in questo caso la forza agente su di esso è nulla e il corpo rimane fermo in un punto di equilibrio instabile. Nel caso in cui il corpo inizia il proprio moto nel punto $x_0 = \sqrt{2a/b}$ *l'energia è sempre nulla ma la forza agente su di esso non lo è. Discutiamo quest'ultimo caso nell'ultimo punto del problema.*

(d) Per quest'ultimo punto si utilizzi il valore esplicito $x_0 = \sqrt{2a/b}$. Quanto vale la velocità del corpo quando passa per l'origine?

In questo caso il corpo parte da un punto a energia potenziale nulla ma con forza diretta verso l'origine degli assi. Il corpo quindi raggiungerà l'origine, dove l'energia potenziale è lo stesso nulla, e quindi vi arriverà fermo.

2. Due macchine termiche utilizzano le stesse sorgenti, alle temperature $T_1 = T_0$ e $T_2 = 2T_0$. La prima macchina, reversibile, assorbe dalla sorgente a temperatura T_2 calore pari a Q e produce il lavoro W. La seconda macchina, irreversibile con rendimento $\eta_2 = 1/4$, produce lo stesso lavoro W. Calcolare in funzione di Q e T_0:

   (a) il lavoro W;

   La prima macchina è reversibile quindi vale l'uguaglianza

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 = \frac{Q_1}{T_0} + \frac{Q_2}{2T_0} \,. \tag{13}$$

   In questa equazione i calori sono quelli assorbiti dalla prima macchina (con segno). In particolare abbiamo $Q_2 = Q$. Questo risultato implica $Q_1 = -Q/2$. Inoltre, il rendimento della prima macchina risulta

$$\eta_1 = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \,. \tag{14}$$

   Possiamo facilmente calcolare il lavoro

$$W = \eta_1 Q_2 = \frac{1}{2} Q \,. \tag{15}$$

   (b) i calori Q'_1 e Q'_2 scambiati dalla seconda macchina con le due sorgenti a temperatura T_1 e T_2;

   La seconda macchina produce lavoro W quindi possiamo dedurre una prima relazione

$$W = Q'_1 + Q'_2 = \frac{1}{2} Q \,. \tag{16}$$

   Inoltre, il rendimento della seconda macchina ci suggerisce

$$\eta_2 = \frac{W}{Q'_2} = \frac{1}{4} \,. \tag{17}$$

   A questo punto abbiamo due equazioni per determinare Q'_1 e Q'_2. Dalla seconda ricaviamo

$$Q'_2 = 4W = 2Q \,, \tag{18}$$

   e poi possiamo usare la prima per trovare

$$Q'_1 = W - Q'_2 = \frac{1}{2} Q - 2Q = -\frac{3}{2} Q \,. \tag{19}$$

   (c) la variazione di entropia dell'universo conseguente ad un ciclo delle due macchine.

   La variazione è dovuta interamente alla macchina irreversibile e risulta

$$\Delta S = -\frac{Q'_1}{T_1} - \frac{Q'_2}{T_2} = \frac{3}{2}\frac{Q}{T_0} - \frac{Q}{T_0} = \frac{1}{2}\frac{Q}{T_0} \,. \tag{20}$$