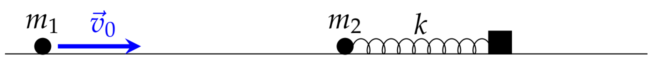
20.09.2019 **Fisica 1 per Matematica**

Nome: ...., Matr. ....

---

1. Una pallina di massa $m_1 = m$ muovendosi su un piano orizzontale liscio con velocità v_0 urta centralmente una seconda pallina di massa $m_2 = 2m$, poggiata sullo stesso piano e in quiete. La pallina 2 è ancorata all'estremità di una molla ideale (l'altro estremo è fissato al piano) di costante elastica k, disposta lungo la direzione del moto come in figura.

   Si esprima il risultato in funzione di v_0, k e m.



(a) Determinare il massimo accorciamento della molla nel caso di urto completamente anelastico.

Nel caso di urto completamente anelastico i due corpi restano attaccati dopo la collisione. Indicando con v_f la velocità finale dei due corpi dopo l'urto, possiamo imporre la conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_f \, , \tag{1}$$

la quale ci permette di determinare

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{v_0}{3} \, . \tag{2}$$

Il massimo accorciamento della molla $\Delta x_{\max}$ si ottiene quanto il sistema dei due corpi attaccati raggiunge uno stato di quiete, vale a dire quando tutta l'energia cinetica iniziale viene tramutata in energia potenziale

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = \frac{1}{2} k \, \Delta x_{\max}^2 \, , \tag{3}$$

e dopo semplici passaggi di algebra troviamo

$$\Delta x_{\max} = \left(\frac{m}{3k}\right)^{1/2} v_0 \, . \tag{4}$$

(b) Si calcoli il lavoro fatto dalla molla dal momento dell'urto al momento dell'arresto dei due corpi.

Il lavoro fatto dalla molla è uguale a meno la variazione della sua energia potenziale elastica

$$L_{\text{molla}} = -U_{\text{fin}} + U_{\text{iniz}} = -U_{\text{fin}} = -\frac{1}{2} k \, \Delta x_{\max}^2 = -\frac{1}{6} m \, v_0^2 \, . \tag{5}$$

(c) Se la distanza iniziale tra le due palline è $l = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}$ e il piano ha un coefficiente di attrito (statico e dinamico) pari a $\mu = \frac{1}{2}$, si calcoli la velocità delle due palline dopo un urto completamente elastico.

Per prima cosa dobbiamo calcolare con che velocità v_1 arriva la pallina numero 1 dopo aver percorso la distanza l lungo il piano. Applichiamo il teorema delle forze vive identificando l'attrito come la forza esterna che compie lavoro sulla pallina. La variazione dell'energia cinetica è data da

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_0^2) = L_{\text{attrito}} = -F_A \, l = -\mu \, m_1 g \, l = -\frac{1}{2} m_1 g \, \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{g} = -\frac{3}{8} m_1 \, v_0^2 \, . \tag{6}$$

Ne deduciamo che un istante prima dell'urto la pallina 1 arriva con velocitá

$$v_1 = \frac{v_0}{2} \,. \tag{7}$$

A questo punto consideriamo l'urto completamente elastico tra le due palline, e indichiamo con w_1 e w_2 le velocità (con segno) delle due palline dopo l'urto. Imponiamo la conservazione di energia e quantità di moto come segue

$$m_1 v_1 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \,, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \,. \tag{9}$$

Possiamo utilizzare la relazione tra le varie masse per riscrivere il sistema in modo più semplice

$$v_1 = w_1 + 2w_2 \,, \tag{10}$$

$$v_1^2 = w_1^2 + 2w_2^2 \,. \tag{11}$$

Utilizziamo la prima equazione e la inseriamo nella seconda per identificare un'unica relazione che ci fornisce informazioni sulla velocità della prima pallina dopo l'urto

$$v_1^2 = w_1^2 + \frac{1}{2}(2w_2)^2 = w_1^2 + \frac{1}{2}(v_1 - w_1)^2 \,. \tag{12}$$

In forma più utile per la risoluzione, scriviamo l'equazione come segue

$$3w_1^2 - 2v_1 w_1 - v_1^2 = 0 \,. \tag{13}$$

Le soluzioni sono

$$w_1 = \frac{1 \pm 2}{3}\, v_1 = \frac{1 \pm 2}{6} v_0 \,. \tag{14}$$

Prendiamo la soluzione con segno negativo, corrispondente alla situazione in cui la pallina 1 torna indietro dopo l'urto; la soluzione con segno positivo corrisponde al caso banale in cui $w_1 = v_1$ e $w_2 = 0$. Concludiamo

$$w_1 = -\frac{1}{6} v_0 \,. \tag{15}$$

Analogamente possiamo determinare la velocità della pallina 2 dopo l'urto

$$w_2 = \frac{v_1 - w_1}{2} = \frac{1}{3} v_0 \,. \tag{16}$$

2. Un recipiente adiabatico con un pistone mobile è diviso al suo interno da una parete adiabatica rigida in due comparti di volume $V_A = V_0$ e $V_B = 2\,V_0$. Il comparto A è vuoto, mentre B contiene $n_B = 1\,mol$ di gas biatomico a temperatura $T_B = T_0$. Si realizzano in sequenza le seguenti trasformazioni: prima si comprime in modo reversibile il gas fino a dimezzare il volume V_B; poi aprendo una valvola tra i due comparti si lascia espandere liberamente il gas all'interno dell'intero volume. Si trovino:

   (a) la temperatura finale del gas dopo le due trasformazioni;

   La prima trasformazione è una adiabatica reversibile dove il volume dimezza. Abbiamo quindi che la temperatura finale risulta

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad T_f = T_i \left(\frac{V_B}{V_B/2}\right)^{\gamma-1} = 2^{2/5}\,T_0\,, \tag{17}$$

   dove abbiamo usato il fatto che per un gas biatomico si ha $\gamma = 7/5$. La temperatura non cambia in seguito all'espansione libera quindi la risposta a questo quesito è la temperatura data nell'ultima equazione.

   (b) la variazione di entropia del sistema dallo stato iniziale a quello finale.

   L'entropia è una funzione di stato e la sua variazione tra due punti qualsiasi per un gas perfetto è data dalla relazione

$$\Delta S = nc_V \ln(T_f/T_i) + nR\ln(V_f/V_i)\,. \tag{18}$$

   Lo stato iniziale e finale, prima e dopo delle due trasformazioni, sono descritti da

$$V_i = 2V_0\,, \quad T_i = T_0\,; \qquad\qquad V_f = 3V_0\,, \quad T_f = 2^{2/5}\,T_0\,. \tag{19}$$

   La variazione di entropia risulta

$$\Delta S = \frac{5}{2}R\ln(2^{2/5}) + R\ln(3/2) = R\left[\ln(2) + \ln(3/2)\right] = R\ln(3)\,. \tag{20}$$

   (c) Una volta completata la transizione allo stato finale, il pistone viene rilasciato molto lentamente e il gas si espande reversibilmente fino a raddoppiare il volume totale. Si calcoli il lavoro fatto dal gas in questa trasformazione.

   Il volume finale dopo questa adiabatica reversibile è $V_f' = 6V_0$. Applicando anche in questo caso la relazione la solita relazione per l'adiabatica, $TV^{\gamma-1}$, possiamo ricavare la temperature finale dopo tale adiabatica

$$T_f' = T_f \left(\frac{V_f}{V_f'}\right)^{\gamma-1} = 2^{2/5}\,T_0 \left(\frac{3V_0}{6V_0}\right)^{2/5} = T_0\,. \tag{21}$$

   Per tale adiabatica il lavoro compiuto dal gas è l'opposto della variazione di energia interna

$$L = -\Delta U = -nc_V = -nc_V(T_0 - 2^{2/5}\,T_0) = \frac{5}{2}RT_0(2^{2/5} - 1)\,. \tag{22}$$

   (d) Si calcoli la variazione di entropia dell'Universo in quest'ultima trasformazione.

   La trasformazione del gas è un'adiabatica reversibile e quindi la variazione di entropia è nulla.