Soluzioni Esercizi Fisica 4F

dott. Stefano Lacaprara lacaprara@pd.infn.it INFN LNL

Esercizio n. 1

a)

$$d = f_I + f_{II}$$

Considero la seconda lente

$$1/p + 1/q = 1/f$$

$$p = (d + a) - f_I \quad , \quad q = b \quad ,$$

Ottengo, risolvendo il sistema:

$$f_{II} = \frac{a}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a}}\right) = 8.23\ cm$$

$$\frac{1}{f_{II}} = (n-1)\frac{2}{R} \quad , \quad n = 1.61$$

b)

$$f_I = d - f_{II} = 21.77\ cm$$

Esercizio n. 2

a) La lunghezza del microscopio è in pratica la distanza tra l'oculare e l'obbettivo. Considero l'obbiettivo:

$$1/p + 1/q = 1/f \quad , \quad q = 255\ mm$$

L'oculare deve essere posizionato in modo che l'immagine dell'obiettiva sia sul suo piano focale. Quindi: $L_{microscopio} = q + f_{oc} =\sim 30\ cm$

b) Ingrandimento dell'obbiettivo: $I_{ob} = q/p \sim 50$

Ingrandimento dell'oculare: $I_{oc} = L_d/f_{oc} = 5$

Ingrandimento microscopio: $I = I_{ob} \times I_{oc} = 250$

Esercizio n. 3

a) Considero arco di cerchio con diametro d e freccia f e con raggio di curvatura R:

$$(R - f)^2 + (d/2)^2 = R^2 \quad , \quad R = \frac{f^2 + (d/2)^2}{2f} = 75.8\ cm$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R} \quad , \quad l = 41.8\ cm$$

b) Visto che l'oggetto si trova ad una distanza maggiore della distanza focale dello specchio, l'immagine è reale.

Esercizio n. 4

a)

$$1/p + 1/q = 1/f \quad , \quad d = p + q$$

Che risolto fornisce: $p_{1,2} = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 - fd}$

L'equazione ha soluzioni reali solo se $f \leq d/4 = 80\ cm$

$f = 95$**:** non ha soluzioni: impossibile

$f = 80$**:** 2 soluzioni conicidenti: $p = q = d/2$. Ingrandimento $I = 1$

$f = 45$: 2 soluzioni simmetriche: $p_1 = 2.66\ m$, $I_1 = 0.2$ e $p_2 = 0.54\ m$, $I_2 = 4.9$

Esercizio n. 5

a) L'illuminazione dello schermo è pari al flusso di energia che lo colpisce. La sorgente emette luce in modo isotropo, quindi il flusso per unità di superficie risulta proporzionale a: $I = \frac{I_0}{r^2}$, dove r è la distanza tra la sorgente e la superficie considerata.

Sia d la distanza della sorgente dallo schermo, e x quella della sorgente dallo specchio. Lo specchio forma una immagine della sorgente ad una distanza pari a $d+2x$ dallo schermo. L'illuminazione totale dello schermo è quindi pari a $I_{tot} = I_{diretta} + I_{riflessa} = \frac{I_0}{d^2} + \frac{I_0}{(d+2x)^2}$

$$\frac{I_{tot}}{I_{diretta}} = \frac{4x^2 + 4dx + 2d^2}{(d+2x)^2} = \frac{m}{n}$$

$$x = -\frac{d}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{n}{m-n}}\right)$$

Si trova che m e n sono limitati dalle seguenti relazioni: $m > n$, $m \leq 2n$; il che significa che, al massimo, l'intensità può essere raddoppiata. $m = 2n$ se $x = 0$, cioè la sorgente è addossata allo specchio. Attenzione: non è la condizione di massima illuminazione.

Esercizio n. 6

a) Sia x la distanza tra la lente e lo schemo, e f la distanza focale della lente.

Considero l'ingrandimento: $I = \frac{x}{D-x} = \frac{x-f}{f}$. Che risolta porge:

$$x = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4f}}{2}$$

Da cui si ricava che l'ingrandimento vale

$$I = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4f}}{D \mp \sqrt{D^2 - 4f}}$$

e la distanza focale deve essere

$$f = \frac{DI}{I+1}$$

Esercizio n. 7

a) Se considero solo l'acqua, profondità apparente del pesce è $p' = \frac{p}{n} = 30\ cm$, ingrandimento trasversale $I = 1$.

Considero la lente: $1/p + 1/q = 1/f$; $q = -60\ cm$, ingrandimento trasversale $I = q/p = 6/5$

Il pesce viene visto da osservatore ad una distanza di 60 cm dalla lente, dalla parte opposta all'osservatore (immagine virtuale), quindi viene visto nella stessa posizione in cui si trova realmente.

b) L'ingrandimento trasversale del pesce è pari a $I = 6/5$,

Esercizio n. 8

a) E' necessario ritardare la fase di una onda piana che colpisce il disco in modo che l'onda uscente abbia superfici con fase costante pari a semisfere con centro nel fuoco della lente.

Se considero un raggio luminoso sull'asse e uno che colpisce il disco ad una distanza r dall'asse, il ritardo di fase h dovrà essere tale da soddisfare l'equazione

$$(h + F)^2 = r^2 + F^2$$

dove F è la distanza focale della mia lenta, ovvero il centro delle onde semisferiche che fuoriescono dal disco. Con la solita approssimazione di raggi parassiali ($r \ll F$), risulta: $h = \frac{r^2}{2F}$

Tale differenza di cammino ottico è dovuta al diverso indice di rifrazione che incontra il raggio assiale da quello laterale.

$$h = (n(r) - n(r = 0)) \cdot d = \frac{r^2}{2F}$$

cioè l'indice di rifrazione in funzione della distanza dall'asse (r) dovrá risultare:

$$n(r) = n_0 - \frac{r^2}{2dF}$$

Esercizio n. 9

a) Dall'ingrandimento trasversale: $I = \frac{q}{p} = \frac{1}{5}$ e dall'equazione dei punti coniugati $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ricavo $q = 10\ cm$, e conseguentemente $f = 8.33\ cm$.

Considero l'immagine sfocata, e considero i raggi luminosi che passano per la parte distale della lente: essi vengono focalizzati nel piano focale e poi definiscono la larghezza dell'immagine sfocata. Quindi i due triangoli aventi come vertice il fuoco e come basi rispettivamente la lente (D) e l'immagine sfocata s sono simili: le loro altezze cono rispettivamente q e d.

Quindi ricavo: $D = \frac{s}{d}q = 1\ cm$. Infine, $F - number = \frac{f}{D} = 8.33$

Esercizio n. 10

a) Considero inizialmente il punto lontano e l'equazione dei punti coniugati $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

La distanza tra l'immagine e la lente è la profondità dell'occhoi $q = 2\ cm$ (un valore di 24 mm sarebbe mediamente più corretto). $p = 300\ cm$, quindi $f_{FAR} = 1.987\ cm$ $P_{FAR} = 50.3\ D$.

b) Al punto vicino: $p = 100\ cm$, $f_{NEAR} = 1.961\ cm$ $P_{FAR} = 51\ D$.

c) Per un occhio normale, la distanza di visione distinta è circa 25 cm: oggetti più vicini non vengono messi a fuoco corretamente. In questa condizione, il potere diottrico del cristallino è pari a $P_{distinta} = 54\ D$. Nell'ipotesi che cristallino e lente di correzione si possano considerare addossate (ipotesi che vale per lenti a contatto, ma non per occhiali ordinari):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{occhio}} + \frac{1}{f_{lente}}$$

Il massimo potere diottrico dell'occhio del soggetto è 51 D, quindi la lente ne deve fornire $P_{lente} = 3\ dt$ per arrivare a equagliare il potere diottrico di un occhio normale.

Analogamente, al punto lontano, un occhio normale deve essere in grado di mettere a fuoco un oggetto all'infinito (se vogliamo essere più precisi, ad una distanza maggiore della distanza iperfocale). In questo caso $P_{infinito} = 50\ D$ e la lente deve fornire un contributo pari a $P_{lente} = -0.3\ D$, quindi serve una lente divergente.

Esercizio n. 11

a) Considero un elemento di volume dV sulla superficie del mercurio, che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Le forze che agiscono su questo volumetto sono: forza peso, forza centrifuga (è un sistema non inerziale) e forza di reazione. Sia x l'asse orizzontale (verso l'esterno), e y quello verticale (verso l'alto).

$\vec{F_g} = -g\rho dV\hat{y}$, $\vec{F_c} = \rho\omega^2 r dV\hat{x}$ $\vec{R} = -(\vec{F_g} + \vec{F_c})$ $\frac{dz}{dr} = \tan\theta = \frac{F_c}{F_g} = \frac{\omega^2 r}{g}$

Risolvendo l'equazione differenziale: $dz = \frac{\omega^2 r}{g}dr$ con condizione al contorno $Z(r = 0) = 0$, si ottine $z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$

Quindi si tratta di una parabola.

b) Il fuoco di una parabola $y = ax^2$ con vertice in $(0, 0)$ è in $(0, \frac{1}{4a})$. Per noi $F = (0., \frac{g}{2\omega^2})$

Quindi per avere $f = 10\ cm$ $\omega = 7\ rad/s$

Esercizio n. 12

a) Per lo specchio $f = R/2 = 20\ cm$ quindi $R = 40\ cm$.

Si consideri ora lo stesso specchio riempito d'acqua: considero sempre raggi parassiali. Essi vengono riflessi dallo specchio in modo tale da essere focalizzati ad una distanza pari a f da esso anche in presenza del liquido. I raggi riflessi, uscendo dall'acqua, vengono rifratti secondo le leggi di Snell. Sia O il centro dello specchio, F il fuoco in assenza di acqua, F' quello con l'acqua e A il punto dove un generico raggio riflesso attraversa l'interfaccia acqua-aria [1]. L'angolo con il quale i raggi vengono riflessi dallo specchio (rispetto alla verticale) è $\tan\theta = \frac{AO}{FO}$ e l'angolo con il quale gli stessi raggi escono dall'acqua: $\tan\theta' = \frac{AO}{F'O}$. Inoltre, per angoli piccoli, $n\theta = \theta'$. Quindi: $FO' = \frac{FO}{n} = 15$.

Dalla legge dei punti coniugati: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{x} = \frac{1}{f'}$ si ricava $x = 2f' = 30\ cm$

Esercizio n. 13

a) In aria, il primo vetro non fa nulla, perchè il suo spessore è costante, il secondo agisce come uno specchio sferico $f = \frac{R}{2}$. In condizioni di autocollimazione, $x = 2f = R = 20\ cm$.

Se all'interno c'e' acqua, questa si comporta come una lente che viene attraversata due volte, prima e dopo la riflessione dallo specchio interno. Da notare che il sistema si può scomporre in questi fattori: una lente piano-concava, la cui superficie concava è data dal primo vetro d'orologio (quello trasparente), con incollato uno specchio sferico riempito di acqua. Inoltre, le lenti piano-concave hanno da un lato non aria, ma acqua, quindi un mezzo con indic di rifrazione n. In questo caso, la legge dei punti coniugati è $\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{f}$. La focale della lente è $\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R}$

In alternativa, si può considerare che la lente sia in aria, e che lo specchio sia in acqua. Per cui cambia la distanza focale dello specchio $f' = f/n$ (vedi esercizio precedente): ossia si può immaginare di mettere uno spessore constante di aria in mezzo alla lente.

Il raggio di luce incontra quindi, nell'ordine: una lente piano concava, uno specchio sferico in acqua, di nuovo la lente piano concava. L'immagine di ogni elemento è la sorgente per l'elemento successivo.

Prima lente (x è posizione immagine): $\frac{1}{L} + \frac{n}{x} = \frac{n-1}{R}$ Specchio (y è posizione immagine): $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{R}$
Seconda lente (L è distanza di autocollimazione): $-\frac{n}{y} + \frac{1}{L} = \frac{n-1}{R}$.

Risolvendo il sistema si ottiene $L = 12\ cm$.

Esercizio n. 14

a) Per la prima lente l'oggetto si trova sul fuoco, quindi l'immagine è all'infinito $q_1 = \infty$. Per la seconda lente: $p_2 = \infty$ quindi $q_2 = f_2 = -15\ cm$. Quindi la posizione dell'immagine coincide con quella dell'oggetto.

Dato che abbiamo immagini all'infinito, non si può parlare di ingrandimenti trasversali, ma occorre ragionare con gli angolo. L'angolo sotto il quale viene vista l'immagine della prima lente è $\theta = \frac{L}{f_1}$, essendo L la dimensione trasversale dell'oggetto. Dopo la seconda lente, l'immagine viene sempre vista sotto lo stesso angolo, ma adesso ad una distanza f_2 dalla lente. Quindi le dimensioni trasversali dell'immagine della seconda lente risultano: $L'' = \theta f_2 = L\frac{f_2}{f_1}$. L'ingrandimento quindi risulta $I = \frac{f_2}{f_1}$. Il sistema ottico ricorda un po' il telescopio, con però immagini intermedie all'infinito e non l'oggetto e l'immagine finale.

L'immagine e' ovviamente virtuale, e risulta non invertita.

Esercizio n. 15

a) L'immagine di L_1 è reale, invertita. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$ porge: $q_1 = 15\ cm$. L'ingrandimento è $I_1 = \frac{q_1}{p_1} = 0.5$. L'oggetto della seconda lente si trova a $p_2 = 45\ cm$ da essa, e l'immagine, usando l'equazione delle lenti, si trova a $q - 2 = -90\ cm$. L'immagine e' non invertita e virtuale. L'ingrandimento risulta $I_2 = -2$.

Quindi la posizione dell'immagine finale è a 30 cm prima della prima lente, quindi coincide con l'oggetto, l'ingrandimento totale è $I = -1$, quindi ha le stesse dimensioni trasverse, ma risulta invertita rispetto all'oggetto.

---

[1] NdA: un disegno aiuterebbe...

Esercizio n. 16

a) L'immagine finale è virtuale, rovesciata e risulta ingrandita.

b) L'esercizio è del tutto analogo al precedente, si danno solo i risultati numerici.
Immagine prima lente: $q_1 = 40/3\ cm$. Immagine seconda lente $q_2 = -100\ cm$

c) Ingrandimento $I_tot = -2$